ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ LOGIKE

12. ožujka 2015.

BODOVI:

- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 3 BODA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

NAPOMENA: Zadatak 3. boduje se na sljedeći način:

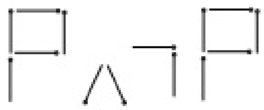
- POTPUNO ISPRAVNO RJEŠENJE: 6 BODOVA
- IZOSTANAK RJEŠENJA: 1 BOD
- KRIVO ILI NEPOTPUNO RJEŠENJE: 0 BODOVA

ZADATAK	BROJ BODOVA	MAX BODOVA
1.		9
2.		15
3.		30
4.		24
5.		15
6.		21
7.		51
8.		54
9.		30
UKUPNO		**249**

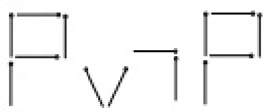
Vrijeme rješavanja testa: 100 minuta

Zadatak 1.

Šibicama su ispisane logičke formule. U sljedećim zadatcima premjestite točno dvije šibice tako da ispisuju tautološku formulu. Na primjer, od konfiguracije '$P \wedge \neg P$':

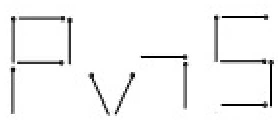


možemo dobiti tautološku formulu '$P \vee \neg P$':



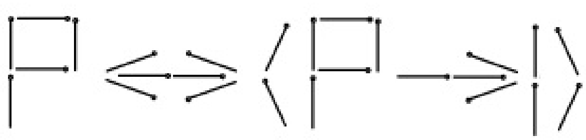
premještanjem dviju šibica koje su tvorile znak konjunkcije tako da sada tvore znak disjunkcije.
Analogno pristupite rješavanju sljedećih zadataka. Od jednostavnih iskaza koristite samo P, S i I, a od veznika konjunkciju, disjunkciju, implikaciju, ekvivalenciju i negaciju. Veznik ekvivalencije uvijek se sastoji od šest šibica, P i S uvijek se zapisuju s pomoću pet šibica, veznik implikacije s pomoću četiri šibice, dok se I te veznici disjunkcije, konjunkcije i negacije zapisuju koristeći dvije šibice. Rješenja je dovoljno zapisati formulama, ali možete ih zapisati i šibicama. U slučaju više mogućih rješenja dovoljno je navesti jedno.

a) $P \vee \neg S$



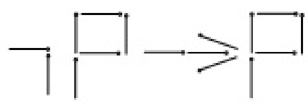
Rješenje:________

b) $P \leftrightarrow (P \rightarrow I)$



Rješenje:________

c) $\neg P \to P$



Rješenje:________

(3×3 boda = 9 bodova)

Zadatak 2.

Ludwig Wittgenstein, jedan od vrlo značajnih logičara dvadesetoga stoljeća, prvo je završio studij aeronautike, a za filozofiju se zainteresirao kasnije pa je otišao studirati na Cambridge kod Bertranda Russella. Kako je smatrao da bi mu život u izolaciji više odgovarao za znanstveni rad od onoga na Cambridgeu, zamolio je Georgea Edwarda Moorea (filozofa koji je također u to vrijeme radio na Cambridgeu) da se založi na sveučilištu da njegovu raspravu o logici (rad koji je prethodio vrlo značajnomu djelu *Tractatus Logico-Philosophicus*) prihvate kao diplomsku radnju. Kad ga je Moore obavijestio da njegovu raspravu sveučilišne vlasti neće priznati kao diplomsku radnju jer nije priložena u primjerenome formatu, s obveznim uvodom, fusnotama i tomu sličnom, Wittgensteinova je reakcija navodno glasila: ”Ako nisam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima, onda mogu ravno u pakao; a ako jesam toga vrijedan, a vi to ne učinite, onda - Boga mi - u pakao možete vi.“
Ako Wittgensteinovu izjavu uzmemo kao premisu, odredite s kojim od ponuđenih sudova kao konkluzivnim sudovima ona tvori valjan zaključak (upišite ’da’ ili ’ne’ na prazne crte):

- Vrijedan sam toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima i učinit ćete iznimku. _____
- Samo ako sam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima, onda ćete učiniti iznimku, a ako nisam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima, onda nećete učiniti iznimku. _____
- Vrijedan sam ili nisam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima. _____
- Mogu ići ravno u pakao ili sam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima. _____
- Nisam vrijedan toga da zbog mene napravite iznimku barem u nekim glupim detaljima ili mogu ići ravno u pakao. _____

(5×3 boda = 15 bodova)

Zadatak 3.

NAPOMENA: Svaki potpuno točno riješeni podzadatak u zadatku 3. nosi šest bodova. Svaki netočno ili djelomično točno riješeni podzadatak nosi nula bodova, a svako izostavljeno rješenje jedan bod.

a) Od dolje navedenih iskaza zaokružite one koji tvore **najveći zadovoljiv (konzistentan) skup iskaza** (skup iskaza koji mogu biti istovremeno istiniti).

1. $P \land Q$
2. $Q \to R$
3. $P \to \neg R$
4. $R \to \neg P$
5. $Q \land \neg R$
6. $P \land \neg P$

b) Navedite **parove** iskaza iz podzadatka **a)** koji međusobno nisu zadovoljivi, odnosno koji **ne mogu** zajedno tvoriti zadovoljiv skup iskaza. Par predstavite brojevima iskaza, u zagradama i razdvojene zarezom, tako da prvi broj ne smije biti veći od drugoga.
Primjer. Par iskaza 7 i 8 bio bi predstavljen kao '(7,8)', te ne bi bilo potrebno ni dopušteno navesti par '(8,7)'.

Rješenje:__________________________

c) Navedite brojeve iskaza iz podzadatka **a)** koje tvore nezadovoljive trojke (skupove od tri iskaza koji ne mogu biti istovremeno istiniti ni za jedno vrednovanje), a da pritom u trojci ne postoje dva iskaza koji su međusobno nezadovoljivi. Pri zapisivanju trojki slijedite uputu danu u podzadatku **b)**.

Rješenje:__________________________

d) Od dolje navedenih iskaza zaokružite one koje tvore **najmanji nezadovoljiv skup**. Zaokružite barem jedan odgovor.

1. $\neg(P \to Q)$
2. $P \lor Q$
3. $\neg(\neg P \land Q)$
4. $\neg P$
5. $\neg Q$

e) Nadopunite rečenicu: S obzirom na istinitost, zakon neprotuslovlja i zakon isključenja srednjega primjeri su ______________________ iskaza.

(5×6 bodova = 30 bodova)

Zadatak 4.

a) Istinitosne se tablice koriste kako bi se odredile istinitosne vrijednosti formule za sve interpretacije. Uporabu istinitosnih tablica u iskaznoj logici inicirali su radovi koje su 1921. godine objavila dvojica logičara, ali nezavisno jedan od drugoga. O kojim je logičarima riječ?

Odgovor: O ______________________________ i ______________________________.

Svaki točno navedeni logičar donosi 3 boda.

b) U polja prvoga retka tablice upišite odgovarajući jednostavni iskaz ili veznik (i možda lijevu ili desnu zagradu) s obzirom na navedene istinitosne vrijednosti ispod zadanoga polja. U tablicu upišite i istinitosne vrijednosti koje nedostaju. **Rješenje se priznaje ako i samo ako su <u>sva</u> polja u tablici točno ispunjena.**

Niz upisanih odgovora u prvome retku mora biti takav da tvori pravilno sastavljenu formulu. **Lijeve se zagrade upisuju u polje najbližega simbola desno od njih, a desne u polje najbližega simbola lijevo od njih. U tablicama se pojavljuju svi i samo oni jednostavni iskazi koji su navedeni na vrhu pomoćnih stupaca (lijevo u tablici).** Podebljana slova označavaju stupac s glavnim veznikom u formuli. U formulama se mogu pojavljivati veznici negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije.

P	Q					$\leftrightarrow$			
I	I	N		I		**I**			
I	N	N		N		**I**			
N	I	I		I		**I**			
N	N	I		I		**I**			

c) Sukladno uputi u podzadatku **b)** popunite i sljedeću tablicu:

P	Q									
I	I	N		N		**N**	N			
I	N	N		N		**I**	I			
N	I	I		I		**I**	N			
N	N	I		N		**N**	N			

d) U tablici se nalaze dvije formule (odvojene dvostrukom okomitom crtom). Pronađite formule i vrijednosti koje nedostaju u tablici, a zatim odredite slijedi li desna formula iz lijeve.

Napomena: Svaka točno zapisana formula zajedno s pripadajućim istinitosnim vrijednostima nosi tri boda. Tekstni se odgovor priznaje ako i samo ako je cijela tablica u podzadatku **d)** točno riješena i tada nosi tri boda. Dakle, podzadatak **d)** ukupno nosi devet bodova.

P	Q	R													
I	I	I	I	N			**I**	N		I	N		I	**I**	
I	I	N	I	N			**I**	I		N	N		I	**I**	
I	N	I	I	I			**N**	N		I	I		N	**I**	
I	N	N	I	I			**I**	I		N	N		N	**I**	
N	I	I	N	N			**I**	N		I	N		I	**I**	
N	I	N	N	N			**I**	I		N	N		I	**I**	
N	N	I	N	N			**I**	N		I	I		N	**N**	
N	N	N	N	N			**I**	I		N	N		N	**I**	

Zaokružite točan odgovor: Desna formula *slijedi* / *ne slijedi* iz lijeve.

e) U istinitosnim tablicama u podzadatcima **b)** i **c)** pojavljuju se dva jednostavna iskaza i tablice imaju četiri retka. U tablici u podzadatku **d)** nalaze se tri jednostavna iskaza i tablica ima osam redaka. Koliko bi redaka imala tablica u kojoj se nalazi n jednostavnih iskaza?

Odgovor: ____________________________.

(8×3 boda = 24 boda)

Zadatak 5.

a) Zadana su tri tautološka iskaza u kojima je svaki od veznika $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ predstavljen jednim brojem od 1 do 5. Upišite u tablicu koji broj predstavlja koji veznik.

1. $1\ 1\ P\ 3\ P$
2. $(P\ 4\ Q)\ 5\ (P\ 2\ 1\ Q)$
3. $1\ (P\ 2\ 1\ P)$

Veznik	Broj
$\neg$	
$\wedge$	
$\vee$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	

b) Koristeći tablicu iz prethodnoga zadatka odredite jesu li sljedeći iskazi tautološki, zadovoljivi (ali ne i tautološki) ili kontradiktorni.

1. $(P\ 2\ Q)\ 5\ (1\ P\ 2\ Q)\ 5\ (1\ P\ 2\ 1\ Q)$ ____________________________
2. $(P\ 2\ 1\ Q)\ 3\ 1\ (P\ 4\ Q)$ ____________________________
3. $(P\ 4\ Q)\ 5\ ((P\ 5\ R) 4\ (Q\ 5\ R))$ ____________________________

c) Rečenicu iz podzadatka **b) 2.** zapišite koristeći samo veznike disjunkcije i negacije i jednostavni iskaz P. Rješenje mora biti minimalno, odnosno sadržavati najmanji mogući broj veznika disjunkcije i negacije.

Rješenje:____________________________

(5×3 boda = 15 bodova)

Zadatak 6.

Simetrijom dane formule iskazne logike nazivamo formulu dobivenu zamjenom jednostavnih iskaza u formuli: prvoga s posljednjim, drugoga s pretposljednjim i tako redom sve dok nije izvršena zamjena svih jednostavnih iskaza u formuli. Ako je broj pojavaka jednostavnih iskaza u formuli neparan, središnji jednostavni iskaz ostaje nepromijenjen. Formula je *simetrična* ako je **logički ekvivalentna** svojoj simetriji; inače je *asimetrična*.

Primjeri.

Formula	Simetrija	Simetrična
P	P	da
$P \wedge \neg Q$	$Q \wedge \neg P$	ne
$((P \wedge Q) \wedge R) \wedge (S \wedge P)$	$((P \wedge S) \wedge R) \wedge (Q \wedge P)$	da

a) Odredite jesu li sljedeće formule simetrične.

Formula	Simetrična (DA/NE)
$\neg P \rightarrow P$	
$(P \leftrightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg S$	
$\neg P \wedge S$	
$(P \rightarrow S) \rightarrow S$	
$(P \leftrightarrow S) \leftrightarrow Q$	
$(P \wedge S) \leftrightarrow S$	

b) Koje su formule simetrične među onima u kojima se pojavljuje samo jedan jednostavni iskaz, na primjer $P \wedge \neg P$? Zaokružite točan odgovor.

1. Sve takve formule
2. Tautologije (i samo one)
3. Netautološke formule (i samo one)

(7×3 boda = 21 bod)

Zadatak 7.

a) Koristeći se samo osnovnim pravilima dopunite sljedeći dokaz iskazima i, desno, potpunim opravdanjima. U opravdanjima upotrijebite 'pretp.' za 'pretpostavka', 'u' za 'uvođenje', 'i' za 'isključenje', i veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ (npr. '$\wedge$u' za 'uvođenje konjunkcije').

1	$\neg(A \wedge B)$	pretp.
2	________________	_____
3	________________	_____
4	________________	_____
5	________________	_____
6	________________	_____
7	A	6, i $\neg$
8	________________	_____
9	________________	_____
10	________________	_____
11	________________	_____
12	B	_____
13	________________	_____
14	________________	_____
15	________________	_____
16	$\neg A \vee \neg B$	_____

b) Sljedeći tekst govori o zakonu dvojine. Nadopunite ga pojmovima koji nedostaju i između dva navedena pojma odaberite odgovarajući.
Iskazi koji sadrže samo veznike ____________________, disjunkcije i negacije ponašaju se prema zakonu dvojine. Prema tom zakonu, ako se zamijene svi veznici disjunkcije veznicima ____________________ i obrnuto, te ako se ispred svakoga pojavljivanja jednostavnoga iskaza dodaju veznici ____________________, dobiva se formula koja je *jednake / oprečne* istinitosne vrijednosti. Na primjer, na opisani se način od iskaza $A \wedge \neg B$ dobiva iskaz $\neg A \vee \neg\neg B$.

c) Razvrstajte sljedeća pravila dokazivanja na osnovna i izvedena: uvođenje disjunkcije, modus ponens, isključenje konjunkcije, De Morganov zakon, opetovanje, zakon isključenja srednjega, hipotetički silogizam.

Osnovna pravila: ______________________________

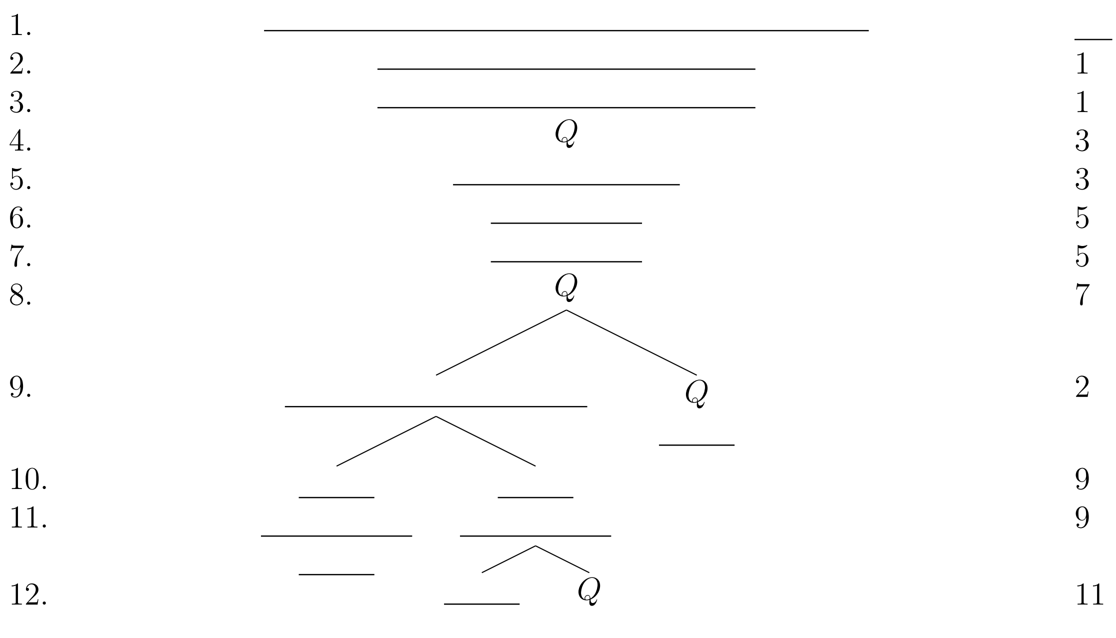
Izvedena pravila: ______________________________

(17×3 boda = 51 bod)

Zadatak 8.

Zadan je sljedeći iskaz: $((P \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow (P \vee \neg Q))$. Provjerite je li iskaz valjan tako što ćete nadopuniti istinitosno stablo iskazima s kvačicom ili bez nje, brojkama, križićima ili kružićima te odgovorite na postavljeno pitanje.

a)



b) Na temelju istinitosnoga stabla možemo zaključiti da je iskaz u podzadatku **a)**:

1. valjan
2. zadovoljiv
3. nezadovoljiv
4. nevaljan

(18×3 boda = 54 boda)

Zadatak 9.

Vratimo se daleko u prošlost kada nije bilo računala, tableta i mobitela pa su se stanovnici dvoraca zabavljali na druge načine. Jedan je od njih bio otkrivanje toga tko se skrio u mnogobrojnim odajama dvorca.

a) U zapadnom se krilu nekoga starog dvorca nalaze dvije zaključane sobe. U svakoj se od njih može nalaziti mačka ili vještica. Postoji mogućnost da je u obje sobe mačka, u obje vještica, ili u jednoj mačka, a u drugoj vještica. Na vratima svake sobe nalazi se po jedan natpis. Sigurno znamo da su ili oba natpisa istinita ili oba lažna. Ovo su natpisi:

Na sobi 1: Najmanje se u jednoj od ovih soba nalazi vještica.

Na sobi 2: U ovoj sobi nije mačka.

Tko je u kojoj sobi?

Soba 1 ____________________ Soba 2 ____________________

b) U istočnom se krilu istoga dvorca nalaze tri zaključane sobe u kojima se mogu nalaziti mačka, vještica ili soba može biti prazna. U ovom se krilu dvorca krije samo jedna mačka i samo jedna vještica, stoga se nijedna od njih ne može nalaziti u više od jedne sobe. Na vratima soba nalaze se natpisi. Sigurno znamo da ako se u prostoriji nalazi vještica, onda je natpis na vratima te sobe istinit, a ako je u sobi mačka, onda je natpis lažan. Ako je pak soba prazna, onda ne znamo je li natpis istinit ili lažan. Ovo su natpisi:

Na sobi 1: Soba 3 je prazna.

Na sobi 2: Mačka je u sobi 1.

Na sobi 3: Ova je soba prazna.

Tko je u kojoj sobi? (Ako je soba prazna, to također napišite.)

Soba 1 __________________ Soba 2 __________________ Soba 3 __________________

c) U kuli se istoga dvorca nalaze dvije zaključane sobe u kojima se mogu nalaziti zmaj ili princeza. Postoji mogućnost da se u obje sobe nalazi zmaj, u obje princeza, ili u jednoj zmaj, a u drugoj princeza. Na svakim se vratima nalazi natpis. Uvjeti istinitosti natpisa jesu sljedeći:

- za natpis na sobi 1: Ako je u sobi princeza, natpis je istinit, a ako je u sobi zmaj, natpis je lažan.
- za natpis na sobi 2: Ako je u sobi zmaj, natpis je istinit, a ako je u sobi princeza, natpis je lažan.

Ovo su natpisi:

Na sobi 1: U obje se sobe nalaze princeze.

Na sobi 2: U obje se sobe nalaze princeze.

Tko je u kojoj sobi?

Soba 1 ____________________ Soba 2 ____________________

d) Uvjeti su isti kao i u podzadatku **c)**. No, postoji mogućnost da je netko zamijenio natpise na vratima pa više **ne znamo koji pripada kojim vratima**.

Ovo su natpisi:

a. U ovoj je sobi zmaj. **b.** U obje su sobe zmajevi.

Tko je u kojoj sobi?

Soba 1 ____________________ Soba 2 ____________________

Nadopunite rečenicu: Vratima sobe 1 pripada natpis _____, a vratima sobe 2 pripada natpis _____.

(10×3 boda = 30 bodova)