

DRŽAVNO NATJECANJE IZ LOGIKE - RJEŠENJA:

NAPOMENA: U zadatcima **1, 2, 4, 5, 6 i 7 a)** moguće je više točnih rješenja. U rješenjima je navedeno po jedno moguće rješenje, stoga je sva rješenja potrebno provjeriti.

Zadatak 1.

a)

1. $\exists x Jx$
2. $\exists x (Jx \wedge \forall y (Jy \rightarrow y = x))$
3. $\forall x \forall y \forall z ((Jx \wedge Jy \wedge Jz) \rightarrow (z = x \vee z = y \vee x = y))$
4. $\exists x \exists y \exists z (Jx \wedge Jy \wedge Jz \wedge \forall w (Jw \rightarrow (w = x \vee w = y \vee w = z))) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z)$
5. $\forall x (Jx \rightarrow \exists y (Rxy \wedge \forall z (Rxz \rightarrow z = y)))$

Napomena: moguća su alternativna rješenja. Sva se točna rješenja priznaju. (5×3 boda = 15 bodova)

b) 1, 2, 3, 5 (3 boda)

Ukupno 18 bodova.

Zadatak 2.

Napomena: svaki točan odgovor zajedno s odgovarajućim protuprimjerom (ako je potreban) donosi 6 bodova. U rješenjima su navedeni mogući protuprimjeri, ali priznaju se i svi ostali odgovarajući protuprimjeri.

1. NE; protuprimjer: neka su predikati Fx : 'x je crn' i Gx : 'x je bijel', a domena: šahovske figure. Iz 'Svaka je figura crna ili bijela' ne slijedi 'Svaka je figura crna ili svaka je figura bijela'.

2. DA

3. DA

4. NE; protuprimjer: neka je predikat 'x voli y', a domena: ljudi: iz 'Svatko nekoga voli.' ne slijedi 'Netko voli svakoga'.

(4 × 6 bodova = 24 boda)

Zadatak 3.

N, I, M, I, M, N, I, I, M, M

(10 × 3 boda = 30 bodova)

Zadatak 4.

a) DA (3 boda)

b) DA (3 boda)

c) Slijedi jedno moguće rješenje. Priznaju se sva točna rješenja koja odgovaraju zadanim uputama.

1.

1. $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

2. $\neg Q$

3. P

(3 boda)

2.

1. $\neg P \vee Q$
2. $P \vee \neg Q$
3. $\neg Q$
4. P

(3 boda)

3. Prva primjena. Izabrane formule:

1. $\neg P \vee Q$
2. $\neg Q$

(3 boda)

Formule u skupu nakon primjene: $\{\neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg Q, P, \neg P\}$

Druga primjena. Izabrane formule:

1. $\neg P$
2. P

(3 boda)

4. DA (3 boda) Odgovor se priznaje ako i samo ako je postupak provjere ispravno proveden.

Ukupno 21 bod.

Zadatak 5.

a) DA (3 boda)

b) (0, 2), (1, 1) (3 boda)

c) 1. NE, Tau_{\vee} i Tau_{\rightarrow} ;

2. DA, primjer: igrač A u prvome potezu odabire formulu P , igrač B u drugome potezu odabire formulu P . Budući da je $P \leftrightarrow P$ tautologija, igrač B je pobjednik (priznaju se i sva ostala točna rješenja);

3. DA, jedna moguća formula nakon desetoga poteza:

$(((((P \leftrightarrow \neg P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P) \leftrightarrow P)$;

4. Tau_{\wedge} ;

5. NE;

6. Tau_{\vee} i Tau_{\rightarrow}

(6 × 3 boda)

Ukupno 24 boda.

Zadatak 6.

a) 1. $\forall x((N_0x \vee N_1x \vee \dots \vee N_8x) \rightarrow \neg Mx)$ (3 boda)

2. $\forall x(N_1x \rightarrow \exists z(Sxz \wedge Mz \wedge \forall y((Sxy \wedge My) \rightarrow y = z)))$ (3 boda)

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1		1	0	1	1	1	0	0
3	1	1	1	0	2		3	2	1
4	1	1	2	1	3			3	
5	2		3		2	2	4		3
6	2		3	1	1	0	2		2
7	2	2	1	0	0	0	1	1	1
8		1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	0	0	0	0	0	0	0

(3 boda)

c)

1	$N_1(1, 1)$	pretp.
2	$\neg M(2, 1)$	pretp.
3	$\neg M(1, 2)$	pretp.
4	$\forall x(S((1, 1)x) \rightarrow (x = (2, 1) \vee x = (1, 2) \vee x = (2, 2)))$	pretp.
5	$\forall x\forall y(x = y \rightarrow (Mx \rightarrow My))$	pretp.
6	$\forall x(N_1x \rightarrow \exists z(Sxz \wedge Mz \wedge \forall y((Sxy \wedge My) \rightarrow y = z)))$	pretp.
7	$N_1(1, 1) \rightarrow \exists z(S(1, 1)z \wedge Mz \wedge \forall y((S(1, 1)y \wedge My) \rightarrow y = z))$	6, $\forall i$
8	$\exists z(S(1, 1)z \wedge Mz \wedge \forall y((S(1, 1)y \wedge My) \rightarrow y = z))$	1,7, $\rightarrow i$
9	$S(1, 1)c \wedge Mc \wedge \forall y((S(1, 1)y \wedge My) \rightarrow y = c)$	pretp., c
10	$S(1, 1)c$	9, $\wedge i$
11	Mc	9, $\wedge i$
12	$S((1, 1)c) \rightarrow (c = (2, 1) \vee c = (1, 2) \vee c = (2, 2))$	4, $\forall i$
13	$\forall y(c = y \rightarrow (Mc \rightarrow My))$	5, $\forall i$
14	$c = (2, 1) \vee c = (1, 2) \vee c = (2, 2)$	10,12, $\rightarrow i$
15	$c = (2, 1)$	pretp.
16	$c = (2, 1) \rightarrow (Mc \rightarrow M(2, 1))$	13, $\forall i$
17	$Mc \rightarrow M(2, 1)$	15,16, $\rightarrow i$
18	$M(2, 1)$	11,17, $\rightarrow i$
19	$M(2, 2)$	2,18, ktd.
20	$c = (1, 2)$	pretp.
21	$c = (1, 2) \rightarrow (Mc \rightarrow M(1, 2))$	13, $\forall i$
22	$Mc \rightarrow M(1, 2)$	20,21, $\rightarrow i$
23	$M(1, 2)$	11,22, $\rightarrow i$
24	$M(2, 2)$	3,23, ktd.
25	$c = (2, 2)$	pretp.
26	$c = (2, 2) \rightarrow (Mc \rightarrow M(2, 2))$	13, $\forall i$
27	$Mc \rightarrow M(2, 2)$	11,26 $\rightarrow i$
28	$M(2, 2)$	11,27, $\rightarrow i$
29	$M(2, 2)$	14,15-19,20-24,25-28, $\forall i$
30	$M(2, 2)$	8,9-29, $\exists i$

Napomena: podzadatak **c)** ukupno nosi 75 bodova. Boduje se po dijelovima ovisno o načinu rješavanja. U predloženome je rješenju korišten skraćeni oblik isključenja disjunkcije i konjunkcije s više od dva konjunkta ili disjunkta (prema napomeni u tekstu zadatka).

Ukupno 84 boda.

Zadatak 7.

1	$\exists xFx \vee \exists xGx$	pretp.
2	$\exists xFx$	pretp.
3	Fa	pretp., a
4	$Fa \vee Ga$	3, $\vee u$
5	$\exists x(Fx \vee Gx)$	4, $\exists u$
6	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2,3-5 $\exists i$
7	$\exists xGx$	pretp.
8	Ga	pretp., a
9	$Fa \vee Ga$	8, $\vee u$
10	$\exists x(Fx \vee Gx)$	9, $\exists u$
11	$\exists x(Fx \vee Gx)$	7,8-10 $\exists i$
12	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1,2-6,7-11 $\vee i$
13	$\exists x(Fx \vee Gx)$	pretp.
14	$Fa \vee Ga$	pretp., a
15	Fa	pretp.
16	$\exists xFx$	16, $\exists u$
17	$\exists xFx \vee \exists xGx$	17, $\vee u$
18	Ga	pretp.
19	$\exists xGx$	19, $\exists u$
20	$\exists xFx \vee \exists xGx$	20, $\vee u$
21	$\exists xFx \vee \exists xGx$	15,16-18,19-21, $\vee i$
22	$\exists xFx \vee \exists xGx$	14,15-22, $\exists i$
23	$\exists x(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$	1-12,13-22, $\leftrightarrow u$

(16 × 3 boda = 48 bodova)