

I. Zadatak – Zadane su premise i ponuđeno je nekoliko mogućih konkluzija. Procijenite koje od njih slijede iz premisa a koje ne. Ako slijede dokažite prirodnom dedukcijom. Ako ne slijede izgradite protumodel, model u kojem su premise istinite a konkluzija nije.

- 1.**
(P1) Svaki miššiš je šišmiš.
Dakle,
- Neki su miššiši šišmiši.
 - Miššiši postoje.
 - Ako postoji miššiš, onda postoji i šišmiš.
 - Svaki plavooki miššiš je šišmiš.
- 2.**
(P1) Mirko i Slavko su visoki.
(P2) Nijedan tenkist nije širok niti je visok.
Dakle,
- Svi su visoki.
 - Postoji tenkist.
 - Postoji tenkist koji nije visok.
 - Ni Mirko ni Slavko nisu tenkisti.
 - Mirko nije širok.
 - Netko nije tenkist.
- 3.**
(P1) Sve se kreće.
(P2) Zemlja je okrugla, no Velebit nije.
(P3) Postoji planet nalik Zemlji, a na njemu brdo nalik Velebitu.
Dakle,
- Velebit se ne kreće.
 - Što nije okruglo, ne kreće se.
 - Bilo da je nešto okruglo bilo da nije, kreće se.
 - Nešto nalik Velebitu što je na nečemu nalik Zemlji se kreće.
 - Ako se nešto ne kreće, Velebit je okrugao.
- 4.**
(P0) Svatko je u braku s onim tko je s njim u braku.
(P1) Netko je sa nekime u braku i nije sretan.

- (P2) Tkogod je u braku s onim tko nije sretan, ni sam nije sretan.
(P3) Antonija je sretna.
Dakle,
- Netko je sretan i s nekime je u braku.
 - Nitko nije u braku ni sa kime.
 - Netko je sa nekime u braku.
 - Netko je sa nekime u braku no nitko od njih nije sretan.
 - Antonija ni sa kime nije u braku.
 - Tko god je u braku s Antonijom, sretan je.

- 5.**
(P1) Sve su vjeverice crvenorepe.
Dakle,
- Sve su vjeverice sa bijelim krznom na trbuhu crvenorepe.
 - Sve su vjeverice crvenorepe ili su morske životinje.
 - Bilo da je netko vjeverica bilo da je dabar, crvenorep je.
 - Sve su vjeverice crvenorepe s bijelim krznom na trbuhu.
- 6.**
(P1) Na svakoj cesti barem je jedna lokva.
(P2) Niti na jednom putu kroz Saharu nema nijedne lokve.
(P3) Nešto je cesta ako i samo ako je asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.

- Dakle,
- Ne postoji put kroz Saharu koji je cesta.
 - Nijedan put kroz Saharu nije asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.
 - Neki su putevi ceste.
 - Na svakom asfaltiranom putu barem je jedna lokva.
 - Za svaku stvar vrijedi da ako na njoj nema niti jedna lokva, onda nije asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.

Neka rješenja

(dokazi za valjane zaključke su neformalni i neki su koraci preskočeni – vi trebate izvesti formalni dokaz, a ovi odgovori vam daju smjernice)

1. Ne slijede: a, b; Slijede: c, d

Protumodel (može biti isti) za a. i b:

$$D = \{Zvonko\}$$

.	Miššiš	Šišmiš
Zvonko	-	-

Objašnjenje: U našem modelu ne postoje miššiši, pa je premisa istinita, a rečenice a. i b. neistinite.

Dokazujemo c.: (oslanjamo se na premise u zadatku)

Pretpostavimo da postoji miššiš. Dodatno pretpostavimo da je to Zvonko. Prema zadanoj premisi znademo da je Zvonko šišmiš ako je miššiš. Dakle, Zvonko je šišmiš, pa stoga i postoji barem jedan šišmiš.

Kako ne znamo je li Zvonko miššiš (to smo tek dodatno pretpostavili), no znamo da postoji barem jedan, možemo ustvrditi da postoji barem jedan šišmiš i bez ove pretpostavke o Zvonku.

Pod pretpostavkom da postoji miššiš, dokazali smo da postoji šišmiš, pa slijedi: Ako postoji miššiš, onda postoji i šišmiš. *QED*

Dokazujemo d.:

Uzmimo bilo koji predmet, npr. Zvonka, i pretpostavimo da je plavooki miššiš.

Iz premise slijedi da je Zvonko šišmiš ako je miššiš, a prema pretpostavci on je miššiš. Pa je stoga i šišmiš. Kako je umjesto Zvonka mogao stajati bilo tko, zaključujemo: Svaki plavooki miššiš je šišmiš.

2. Ne slijede: a, b, c, e; Slijede: d, f

Protumodel (može biti isti) za a, b, c, e:

$$D = \{Mirko, Slavko, Zvonko\}$$

.	Visok	Tenkist	Širok
Mirko	+	-	+
Slavko	+	-	+
Zvonko	-	-	-

Neka objašnjenja: U ovome modelu, protuprimjer za a. je Zvonko, za b. i c. su sva trojica, a za e. je Mirko.

Dokazujemo d.:

Pretpostavimo da je Mirko tenkist. Prema *P2* to je dostatan uvjet za tvrditi da nije širok niti visok. No prema *P1* Mirko je visok.

Dakle, pod pretpostavkom da je tenkist ušli smo u protuslovlje, pa zaključujemo da nije tenkist. (dokaz o Slavku je identičan)

Dokazujemo f.:

U dokazu za d. pokazali smo da Mirko nije tenkist, iz čega slijedi i da netko nije tenkist.

3. Ne slijede: a i b; Slijede: c, d, e

Protumodel (može biti isti) za a. i b.:

$$D = \{Velebit, Zemlja\}$$

.	Kreće se	Okruglo
Velebit	+	-
Zemlja	+	+

Objašnjenje: protuprimjer za a. u ovom modelu:

Velebit se kreće; protuprimjer za b. u ovom modelu:

Velebit nije okrugao i kreće se.

Dokazujemo c.:

Kako se sve kreće (prema *P1*), slijedi da kakvo god nešto bilo kreće se, pa tako i bilo ono okruglo ili ne. (Uočite da konzekvens (nužan uvjet) u ovoj rečenici ne može biti neistinit (uzimajući u obzir da se sve kreće), pa je tako i cijeli sud istinit)

Dokazujemo d.:

Kako postoji planet nalik Zemlji, postoji i nešto nalik Zemlji, te kako je na njemu brdo nalik Velebitu, slijedi i da je na njemu nešto nalik Velebitu. A kako se (prema *P1*) sve kreće, slijedi i da se nešto nalik Velebitu što je na nečemu nalik Zemlji kreće.

Dokazujemo e.:

Kako se (prema *P1*) sve kreće, slijedi da nije tako da se nešto ne kreće.

Stoga je tvrdnja "Ako se nešto ne kreće, onda je Velebit okrugao" pod tom pretpostavkom istinita jer je njezin antecedens (dostatan uvjet) neistinit.

4. Ne slijede: a, b, e; Slijede: c, d, f

Protumodel za a. i b.

$D = \{t, m, a\}$			
.	<i>Btx</i>	<i>Bmx</i>	<i>Sx</i>
Tonka	-	+	-
Mauro	+	-	-
Antonija	-	-	+

Objašnjenje: protuprimjer za a.: I Tonka i Mauro su u braku, i jedino su oni u braku, no nitko od njih nije sretan, što znači da u našem modelu vrijedi "Tko god je s nekime u braku, nije sretan."; protuprimjer za b.: u našem modelu netko je s nekime u braku: Tonka i

Protumodel za e.

$D = \{Antonija, Darko\}$				
Mauro.	.	<i>Bax</i>	<i>Bdx</i>	<i>Sx</i>
	Antonija	-	+	+
	Darko	+	-	+

Dokazujemo c.:

Prema *P1* netko je s nekime u braku i nije sretan, stoga je i netko s nekime u braku.

Dokazujemo d.:

Ispod premise dodatno pretpostavimo da je Tonka s Maustom u braku i da nije sretna. Iz ovoga i *P0* slijedi da je Mauro s njom u braku, a prema pretpostavci znamo da ona nije sretna, pa je tako Mauro u braku s nekim tko nije sretan.

Prema $P2$ i gornjega, slijedi i da Mauro nije sretan. Iz ovoga slijedi da je Tonka s Mauro u braku i da nitko od njih nije sretan. Dakle, netko je s nekim u braku i nitko od njih nije sretan.

Do ovoga došli pomoću dodatne pretpostavke, no možemo je odbaciti (tj. to ustvrditi i bez nje) jer prema $P2$ znademo da je netko s nekime u braku i nije sretan.

Dokazujemo f.:

Pretpostavimo da je Branko u braku s Antonijom. Prema $P0$ slijedi i da je ona u braku s njim. Prema $P2$ slijedi da ako je Antonija u braku s Brankom a on nije sretan, onda ni ona nije sretna. No, prema $P3$ ona je sretna, pa stoga nije slučaj da je i u braku s Brankom i da on nije sretan ($\neg(Bab \wedge \neg Sb)$, MT). A to je jednakovrijedno sudu 'Ako je Antonija u braku s Brankom, onda je on sretan' ($Bab \rightarrow Sb$) (mogli smo izraziti i disjunkcijom: 'Antonije nije u braku s Brankom ili je Branko sretan' (DeM), pa dalje $DS...$) - u svakom slučaju proizlazi da je pod početnom pretpostavkom Branko sretan.

Kako je umjesto Branka mogao stajati bilo tko, zaključujemo: Tkogod je u braku s Antonijom, sretan je.

5. Ne slijede: c. i d.; Slijede: a. i b.

Protumodel za c. i d.				
$D = \{zagi, bijelic\}$				
.	V	D	C	B
zagi	+	-	+	-
bijelić	-	+	-	-

Objašnjenje: protuprimjer u modelu za c. je Bijelić, a protuprimjer za d. je Zagi.

Dokazujemo a.:

Kako su sve vjeverice crvenorepe, slijedi i da su bilo kakve vjeverice crvenorepe, pa tako i one s bijelim krznom na trbuhu.

Dokazujemo b.:

Kako su sve vjeverice crvenorepe, slijedi da su one crvenorepe ili bilo što drugo, u ovom slučaju crvenorepe ili morske životinje.

6. Ne slijede: c. i d.; Slijede: a, b. i e.

Za predikate koristimo sljedeće pokrate: Cx za 'x je cesta'; Ax za 'x je asfaltiran'; Px za 'x je put'; Kxy za 'x ide kroz y'; Nxy za 'x je na y - u'; Lx za 'x je lokva'; Mx za 'x je namijenjen za motorna vozila'; s za Saharu

Krnji protumodel za c.						
$D = \{a, b, s, l_1, l_2\}$						
.	C	P	Kxs	L	Nl ₁ x	Nl ₂ x
a	-	+	+	-	-	-
b	-	+	-	-	+	+
l ₁	-	-	-	+	-	-
l ₂	-	-	-	+	-	-

Objašnjenje: U slučaju u kojemu ne postoje ceste,

premise su istinite a konkluzija neistinita (jer tvrdi da ceste postoje!).

Krnji protumodel za d.								
$D = \{a, b, s, l_1, l_2\}$								
.	C	A	P	M	L	Nl ₁ x	Nl ₂ x	Kxs
a	-	+	+	-	-	-	-	+
b	+	+	+	+	-	+	+	-
l ₁	-	-	-	-	+	-	-	-
l ₂	-	-	-	-	+	-	-	-

Objašnjenje: $P1$ je istinita: b je jedina cesta i na njoj postoji lokva. $P2$ je istinita: a je jedini put kroz Saharu i na njemu nema nijedne lokve. $P3$ je istinita: b je jedina cesta i ona je jedina asfaltirani put namijenjen za motorna vozila. No rečenica pod d. u ovom modelu nije, naime, a je asfaltirani put, no na njemu nema nijedne lokve.

Dokazujemo a.:

Ovaj je sud jednakovrijedan sudu: 'Nijedan put kroz Saharu nije cesta':

$$\neg \exists x (Px \wedge Kxs \wedge Cx) \equiv \forall x ((Px \wedge Kxs) \rightarrow \neg Cx).$$

Pa dokažimo da slijedi ova rečenice:

Pretpostavimo da je Aleja lipa put kroz Saharu ($Pa \wedge Kas$). Prema $P2$ slijedi da na Aleji lipa nema nijedne lokve (ili, što je isto, nema barem jedne lokve). Iz ovoga slijedi prema $P1$ da Aleja lipa nije cesta.

Kako smo umjesto Aleje lipa mogli uzeti bilo koje ime, slijedi da nijedan put kroz Saharu nije cesta (odnosno, da ne postoji put kroz Saharu koji je cesta)

Dokazujemo b.:

U ovome se dokazu oslanjamo na spoznaju iz prethodnog.

Opet dodatno pretpostavimo da je Aleja lipa put kroz Saharu. Iz prethodnog dokaza znamo da tada Aleja lipa nije cesta. Prema $P3$ Aleja lipa je cesta **ako i samo ako** je asfaltiran put namijenjen za motorna vozila, no kako nije cesta nije ni asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.

Kako je umjesto Aleje lipa mogla stajati bilo koja druga konstanta, slijedi da je nešto put kroz Saharu samo ako nije asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.

Dokazujemo e.:

Dodatno pretpostavimo da na Jozefini nema niti jedne lokve.

Pod tom pretpostavkom, pretpostavimo da je Jozefina cesta. No iz toga prema $P1$ slijedi da je na njoj barem jedna lokva, a to je protuslovno našoj pretpostavci, pa stoga nije cesta. A, ako nije cesta, onda prema $P3$ nije ni asfaltirani put za motorna vozila.

Dakle, ako na Jozefini nema niti jedne lokve, nije ni asfaltirani put za motorna vozila, a kako je umjesto Jozefine mogao stajati bilo tko, slijedi: Ako na nečemu nema nijedne lokve, ono nije asfaltirani put namijenjen za motorna vozila.