Ponavljanje

Što je zaključak?

Zaključak je oblik misli u kojemu iz nekog skupa rečenica (sudova) izvodimo nove rečenice (sudove).
Rečenice iz kojih izvodimo nazivamo premisama (P), a rečenicu koju izvodimo nazivamo konkluzijom (K).

Primjer 1
(1. premisa) Ako je Hrvatska na sjevernoj zemljinoj polutci, onda je sjevernije od Australije.
(2. premisa) Hrvatska je na sjevernoj zemljinoj polutci.
Dakle, (konkluzija) Hrvatska je sjevernije od Australije.

Primjer 2
(P1) Sve su vjeverice glodavci. (P2) Svi glodavci su sisavci.
Dakle, (K) Sve su vjeverice sisavci. (ili: (K2) Tkogod nije sisavac, nije ni vjeverica.)

Za logiku sudova:
Neki je zaključak valjan (odnosno, naše je zaključivanje ispravno) ako i samo ako nije moguće da je skup premisa istinit, a konkluzija neistinita.
Ovakvu interpretaciju zaključka možemo i ovako odrediti: Zaključak je valjan kada je sud u kojemu je prikazan kao konjunkcija premisa koja implicira konkluziju valjana rečenica.

Za logiku pojmova:
Zaključak je valjan ukoliko ne postoji model ("svijet") u kojemu su premise istinite, a konkluzija neistinita, a nije valjan ukoliko takav model ("svijet") postoji.

Postoji li način na koji pouzdano možemo izvoditi konkluzije iz premisa?

Postoji nekoliko načina. Mi smo u prvom polugodištu radili dokaz *prirodnom dedukcijom* kojim ćemo se nastaviti baviti.
***

Kako možemo provjeriti valjanost/nevaljanost[1] nekog već zadanog zaključka?

Postoji nekoliko metoda za provjeru valjanosti zaključka.

1. Neformalno (izravno ili neizravno [2])

Primjer 3 - izravno
Možemo li iz suda 'Ana je bila na moru' zaključiti (odnosno, slijedi li nužno) na 'Ana i Mia su bile na moru'? Ne, jer iz obavijesti da je Ana bila na moru, ne možemo sa sigurnošću tvrditi da je i Mia bila na moru.

2. Istinitinosnim tablicama - provjeravamo za svako tumačenje elementarnih sudova postoji li tumačenje u kojima su premise istinite, a konkluzija neistinita. Ako takvog tumačenja nema, zaključak je valjan, ako pak takvo tumačenje postoji, zaključak nije valjan.

3. Potpisivanjem istinitinosnih vrijednosti (izravno ili neizravno)

Primjer 4 - izravno

Iz suda:	Možemo li izvesti sud:...?		
'Ana je bila na moru'	'Ana je bila na moru	i	Mija je bila na moru'
I	I	?	←- - - ?
(čitaj: pod pretpostavkom da...)			

4. Navođenjem protuprimjera, odnosno pronalaženjem modela u kojemu su premise istinite, a konkluzija neistinita (ukoliko zaključak nije valjan)

[1]Napomena: Pojam "nevaljan zaključak" u sebi je protuslovan, jer je svaki zaključak valjan, a ako nije, onda nije ni zaključak. Zato neki logičari oblike koji nalikuju zaključku, no nisu valjani nazivaju varavim ili prividnim zaključcima. Ovdje je ostavljen pojam "nevaljan zaključak" koji je, iako nelogičan, uobičajeniji.
[2]Neizravan dokaz (reductio ad absurdum) je svaki dokaz u kojemu pretpostavljajući istinu ili neistinu nekoga suda uđemo u protuslovlje, pa zaključujemo na neistinu pretpostavke

U **Primjerima 5 – 8** analizirat ćemo zaključak iz **Primjera 1**.

Ključ tumačenja:
h za Hrvatska
a za Australija
Nx za 'x je na sjevernoj zemljinoj polutci'
Sxy za 'x je sjevernije od y'

Primjer 5 - Prikažimo premise i konkluziju u istinosnim tablicama! (metodom 2.)

.	Nh	Sha	$((Nh \to Sha)$	$\wedge$	$Nh)$	$\to$	Sha
1	I	I				I	I
2	I	N	N	N		I	
3	N	I				I	I
4	N	N		N	N	I	

Što zapravo radimo sastavljajući istinosne tablice? Provjeravamo za svako od (u ovom slučaju četiri) tumačenja, zadovoljava li naš sud. Ako postoji tumačenje u kojemu će konjunkcija premisa biti istinita, a konkluzija (koja je zapisana kao konzekvens) neistinita, onda iz premisa ne slijedi ta konkluzija. U našem slučaju takvog tumačenja nema pa je zaključak valjan.

Neizravan dokaz - reductio ad absurdum

No postoji i kraći put od izrade tablica kojim možemo provjeriti postoji li redak u kojemu je ta implikacija neistinita.
Pretpostavimo da je neistinita, te ako pomoću te pretpostavke uđemo u proturječje, naša je pretpostavka bila pogrešna, tj. ne postoji tumačenje u kojemu je neistinita. Na našem primjeru to izgleda ovako:

Primjer 6 (metoda 3. - neizravno)

Pitamo se: $(Nh \to Sha), Nh \models Sha$?(je li Sha pod ovim pretpostavkama istinit?)

$((Nh$	$\to$	$Sha)$	$\wedge$	$Nh)$	$\to$	Sha
I	I	$\cancel{\text{I}}$	I	I	N	$\cancel{\text{N}}$
6	5	7	3	4	1	2

Opis: Pretpostavljamo da premise ne impliciraju konkluziju (1), odnosno, da postoji tumačenje (redak u istinosnoj tablici) u kojemu je skup premisa istinit, a konkluzija neistinita (2,3). Kako je konjunkcija premisa istinita (3), svaki je od konjunkata istinit (4,5), kako je (5) implikacija, a njezin antecedens istinit (6, a prema 4), i njezin konsekvnes mora biti istinit (7), no to proturječi (2). Pod pretpostavkom da je zaključak nevaljan, došli smo do protuslovlja, pa zaključujemo da nije nevaljan, odnosno da je valjan (drugim riječima: da nema tumačenja u kojemu bi ovaj sud bio neistinit)

Uočite sličnost ovoga dokaza s neizravnim dokazom metodom prirodne dedukcije:

Primjer 7 (sličnost neizravnog dokaza u prirodnoj dedukciji i potpisivanja istinosnih vrijednosti)

1	$(Nh \to Sha) \wedge Nh$	pretp.
2	$\quad \neg Sha$	pretp.
3	$\quad Nh \to Sha$	1/ i$\wedge$
4	$\quad Nh$	1/ i$\wedge$
5	$\quad Sha$	3, 4/ i$\to$
6	$\quad \bot$	2, 5/ u$\bot$
7	$\neg\neg Sha$	...

Usporedba Primjera 6 i Primjera 7: 1. i 2. redak (pretpostavke) odgovaraju 1,2. i 3. koraku u Primjeru 6. 3. i 4. redak, odgovaraju 4. i 5. koraku. 5. redak u dokazu, odgovara 6. i 7. koraku. Uvođenje $\bot$ odgovara precrtavanju istinitosnih vrijednosti koje su u protuslovlju. Na kraju, kao i u Primjeru 6, zaključujemo da je naša pretpostavka neodrživa, pa zaključujemo na njezin nijek.

Primjer 8 (ovo isto možemo i izravno dokazati u sustavu prirodne dedukcije)

1		
2	$(Nh \to Sha) \wedge Nh$	pretp.
3	Nh	2/ i$\wedge$
4	$Nh \to Sha$	2/ i$\wedge$
5	Sha	3, 4/ i$\to$
6	$((Nh \to Sha) \wedge Nh) \to Sha$	2–5/ u$\to$

Problem - kako prosuditi o nekom zaključku da nije valjan?

Takav zaključak u sustavu prirodne dedukcije ne možemo dokazati, pa kako dokazati da ga ne možemo dokazati?

Uzmimo malo drugačiji zaključak, i provjerimo je li valjan:

Primjer 9
(1. premisa) Hrvatska na sjevernoj zemljinoj polutci ili je sjevernije od Australije.
(2. premisa) Hrvatska je na sjevernoj zemljinoj polutci.
Dakle, (konkluzija) Hrvatska je sjevernije od Australije.
Ispitajmo vrijedi li $(Nh \vee Sha), Nh \models Sha$ pretpostavljajući da ne vrijedi:

$((Nh$	$\vee$	$Sha)$	$\wedge$	$Nh)$	$\to$	Sha
I	I	N	I	I	N	N
6	5	7	3	4	1	2

Objašnjenje: U prostuslovlje nismo ušli, što znači da je naša pretpostavka bila točna (tj. da postoji tumačenje u kojemu su premise istinite a konkluzija neistinita), tj. da **zaključak nije valjan**. Pronašli smo protuprimjer (redak u tablici u kojemu je implikacija za vrijednosti elementarnih sudova neistinita). **Protuprimjer: Slučaj u kojemu Hrvatska jest na sjevernoj zemljinoj polutci, no nije sjevernije od Australije.**[1] $(Nh \wedge \neg Sha)$

Primjer 10
$(P1)$ Ako je Crni jarac, onda je šupljorožac.
$(P2)$ Ako Crni nije parnoprstaš, onda nije šupljorožac.
$(P3)$ Crni ne pripada porodici koja je izvorna u Australiji ili nije nije parnoprstaš
?$(K1)$ Crni nije jarac.
?$(K2)$ Ako je Crni jarac, onda ne pripada porodici koja je izvorna u Australiji.

Provjerimo koji od sudova $K1$ ili $K2$, ako ijedan, proizlaze iz zadanih premisa, prema zadanom ključu tumačenja: c za Crni, Jx za 'x je jarac'; Sx za 'x je šupljorožac'; Px za 'x je parnoprstaš'; Ax za 'x pripada porodici koja je izvorna u Australiji'

Provjeravamo slijedi li $K1$?

$((Jc$	$\to$	$Sc)$	$\wedge$	$(\neg Pc$	$\to$	$\neg Sc)$	$\wedge$	$(\neg Ac$	$\vee$	$\neg Pc))$	$\to$	$\neg Jc$
I	I	I	I	N	I	N	I	I	I	N	N	N
8	7	9	4	11	6	10	3	13	5	12	1	2

Pretpostavivši da ne slijedi, nismo ušli u protuslovlje, pa se naša pretpostavka pokazala točnom. Sada možemo navesti i protuprimjer: Tumačenje u kojemu Crni jest jarac, šupljorožac i parnoprstaš, no ne pripada porodici koja je izvorna u Australiji $(Jc, Sc, Pc, \neg Ac)$

[1] VAžNO: iako iz geografije znamo da Hrvatska jest sjevernije od Australije, to ne čini zaključak valjanim; u logici se ne pitamo jesu li ove rečenice istinite, o njihovoj istinitosti pita se geografija; u logici se pitamo možemo na temelju nekih sudova za koje **pretpostavljamo** da su istiniti, tvrditi istinitost nekih drugih sudova

Provjeravamo slijedi li $K2$?

$((Jc$	$\to$	$Sc)$	$\wedge$	$(\neg Pc$	$\to$	$\neg Sc)$	$\wedge$	$(\neg Ac$	$\vee$	$\neg Pc))$	$\to$	$(Jc$	$\to$	$\neg Ac)$
I	I	I	I	N	I	N	I	~~I~~	I	N	N	I	N	~~N~~
10	7	11	4	13	6	12	3	15	5	14	1	8	2	9

Dokazali smo da $K2$ slijedi iz premisa - pretpostavivši da ne slijedi, ušli smo u protuslovlje. Nju bismo, dakle, mogli i dokazati metodom prirodne dedukcije.

Kako dokazati da neki nevaljani zaključak koji se sastoji od kvantificiranih sudova nije valjan?

Kao i u zaključcima s nekvantificiranim sudovima, nevaljane zaključke ne možemo dokazati prirodnom dedukcijom (inače bi metoda prirodne dedukcije bila nepouzdana metoda).

Pa kako onda dokazati da neka rečenica ne slijedi iz nekog skupa rečenica?

Jedan od načina je da konstruiramo svijet u kojemu će premise biti istinite a konkluzija neistinita. Naime, ako ne možemo napraviti model u kojemu bi premise bile istinite, a konkluzija neistinita, zaključak je valjan.

Primjer 11
Sve vjeverice su glodavci. Neki oraholjupci su glodavci.
Dakle,
?($K1$) neki oraholjubci su vjeverice.
?($K2$) neki oraholjubci nisu vjeverice.

Očigledno je da nijedna od ovih konkluzija ne proizlazi iz zadanih premisa. No kako to pokazati?

1. Način - formalizirajte:

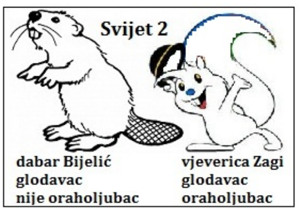
(1. Premisa)$\forall x(Vjeverica(x) \to Glodavac(x))$
(2. Premisa) $\exists x(Oraholjubac(x) \wedge Glodavac(x))$

Očito je da pomoću ovih premisa ni na koji način ne možemo odrediti odnos pojmova 'Oraholjubac' i 'Vjeverica'. Naime, glodavci oraholjupci iz 2. premise mogu biti oni koji nisu vjeverice, a mogu biti i sve vjeverice.

2. Način - pronaći protuprimjer, tj. svijet (model) u kojemu će premise biti istinite, a konkluzija neistinita.

Iz nekog skupa premisa slijedi neka konkluzija ako i samo ako je ta konkluzija istinita u svakom svijetu (modelu) u kojemu su istinite i premise.

Pogledajmo sljedeća dva svijeta koji se sastoje od dva predmeta - Zagija i Bijelog - u kojima su naše premise istinite.



Domena (odnosno naši svjetovi) uključuje dva predmeta: Zagija (z) i Bijelog (b), a to zapisujemo ovako: $D = \{z, b\}$
U Svijetu 1 (prvom modelu) članovi skupa glodavaca su Zagi i Bijelić (zapisujemo: $G : \{z, b\}$), član skupa vjeverica je samo Zagi (zapisujemo: $V : \{z\}$), a član skupa oraholjubaca samo Bijelić (zapisujemo: $O : \{b\}$)
U Svijetu 2 (drugom modelu) glodavci su i Zagi i Bijelić (zapisujemo: $G : \{z, b\}$), vjeverica je samo Zagi (zapisujemo: $V : \{z\}$), oraholjubac samo Zagi (zapisujemo: $O : \{z\}$)
Dakle,

Svijet 1 $D = \{z, b\}$ $G : \{z, b\}$ $V : \{z\}$ $O : \{b\}$ Ovaj je svijet (model) protuprimjer za $K1$. Obje su premise u njemu istinite, no nijedna vjeverica nije oraholjubac (a to je protuslovno $K1$).	Svijet 2 $D = \{z, b\}$ $G : \{z, b\}$ $V : \{z\}$ $O : \{z\}$ Ovaj je svijet (model) protuprimjer za $K2$. Obje su premise u njemu istinite, no svi oraholjupci su vjeverice (a to je protuslovno $K2$).

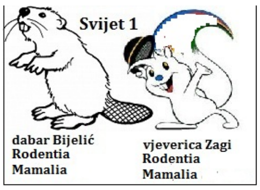
Ovo možemo jednostavnije i ovako zapisati:

	Svijet 1			Svijet 2		
.	Glodavac	Vjeverica	Oraholjubac	Glodavac	Vjeverica	Oraholjubac
Zagi	+	+	-	+	+	+
Bijelić	+	-	+	+	-	-
	Zadane premise u ovom su modelu istinite: Zagi je jedina vjeverica i glodavac je, pa su stoga sve vjeverice glodavci; Bijelić je glodavac i oraholjubac, pa su stoga neki oraholjupci glodavci. $K1$ je u ovom modelu neistinita: vidljivo je da nema vjeverice oraholjubice, jer jedina vjeverica u ovom svijetu (Zagi) to nije. Stoga, $K1$ ne slijedi iz zadanih premisa			Zadane premise u ovom su modelu istinite: Zagi je jedina vjeverica i glodavac je, pa su stoga sve vjeverice glodavci; Zagi je glodavac i oraholjubac, pa su stoga neki oraholjupci glodavci.Vidljivo je da u ovom modelu $K2$ nije istinita, tj. nije istinito da neke vjeverice nisu oraholjubci, jer je jedina Zagi, a on jest oraholjubac. Stoga $K2$ ne slijedi iz zadanih premisa.		

Primjer 12 Svi rodentia mammalia. Sve vjeverice su rodentia.
Dakle, (?) svi mammalia su rodentia.

1. Uočite da iz zadanih premisa možemo zaključiti da su sve vjeverice rodentia, ali ne i obrnuto kao što se u gornjem zaključku tvrdi. (Dokaz: Pretpostavimo da je Bijeli vjeverica. Iz toga slijedi da je i rodentia (prema $P2$), a iz toga pak da je mamalia (prema $P1$). Kako je Bijeli mogao biti bilo tko, zaključujemo da su sve vjeverice mammalia)

2. Izgradimo model u kojemu će premise biti istinite, a konkluzija neistinita, te tako pokažimo da zaključak nije valjan!



.	Svijet 1		
.	Vjeverica	Rodentia	Mammalia
z	+	+	+
b	-	+	+
	U ovome su modelu obje premise istinite (Provjerite!: $(P1)$ $((Rz \to Mz) \wedge (Rb \to Mb))$; $(P2)$ $((Vz \to Rz) \wedge (Vb \to Rb)))$, no konkluzija $((Mz \to Vz) \wedge (Mb \to Vb))$ nije. Ono što ju opovrgava je Bijeli koji je Mamalia, no nije vjeverica. $(Mb, \neg Vb)$		

Zaključak nije valjan, tj. $\forall x(Rx \to Mx), \forall x(Vx \to Rx) \nvDash \forall x(Mx \to Vx)$

Primjer 13 Svatko voli nekoga.
Dakle, (?) Netko voli svakoga.

1. Formalizirajte. Pitanje je: $\forall x \exists y Voli(x,y) \models \exists x \forall y Voli(x,y)$?
2. Napravimo model od dvije osobe - Darka i Marine ($D = \{d, m\}$). Uzmimo i da nitko od njih ne voli drugo, no da svatko od njih voli sama sebe.

To možemo i ovako prikazati:

Voli	Darko	Marina
Darko	$+$	$-$
Marina	$-$	$+$

Premisa je istinita - svatko doista voli nekoga, u ovom slučaju Darko voli sebe (Vdd) i Marina voli sebe (Vmm), a kako su Darko i Marina svi predmeti u modelu, za svakoga vrijedi da voli nekoga. No u ovom modelu, konkluzija nije istinita: nema osobe koja svakoga voli: Darko ne voli Marinu ($\neg Vdm$), a Marina ne voli Darka ($\neg Vmd$), a njih su dvoje sve osobe u modelu. Zaključak, dakle, nije valjan (odnosno $\forall x \exists y Voli(x,y) \not\models \exists x \forall y Voli(x,y)$). Protuprimjer: $D = \{d, m\}$, $Vdd, Vmm, \neg Vdm, \neg Vmd$

Primjer 14 (za kraj malo zeznutiji)
U svakoj stanici za tehnički pregled postoji barem jedna graba.
U radnji majstora Radovana ima jedna graba.
(?) Dakle, radnja majstora Radovana je stanica za tehnički pregled.

1. formalizirajmo prema sljedećem ključu tumačenja: Sx za 'x je stanica za tehnički pregled'; Gx za 'x je graba'; Uxy za 'x je u $y-u$'; r za radnja majstora Radovana.

Pitamo se: $\forall x(Sx \rightarrow \exists y(Gy \wedge Uyx)), \exists x(Gx \wedge Uxr) \models Sr$?

Iako je jasno da zaključak nije valjan, naime iz činjenice da svaka stanica za teh. pregled ima neku grabu, ne slijedi da je bilo što što ima grabu stanica za teh.pregled. No kako dati protuprimjer (protumodel)?

Koliko nam predmeta u domeni treba da bismo zaključku naveli protuprimjer? - Treba nam radionica majstora Radovana (r), i jedna stanica za tehnički pregled - nazovimo ju 'TEH' (t). Nadalje, trebaju nam dvije grabe - jedna za TEH a druga za radionicu majstora Radovana (označimo ih s g_1 i g_2).

$D = \{r, t, g_1, g_2\}$

.	S	G	Ug_1x	Ug_2x
t	$+$	$-$	$+$	$-$
r	$-$	$-$	$-$	$+$
g_1	$-$	$+$	$-$	$-$
g_2	$-$	$+$	$-$	$-$

Komentar: U ovome su svijetu sve zadane premise istinite. Prvu premisu istinitom čini: St, Gg_1, Ug_1t a kako je TEH jedina stanica za teh. pregled, to je dovoljno da ova premisa bude istinita. Drugu premisu istinitom čini: Gg_2, Ug_2r pa stoga i postoji graba u radnji majstora Radovana. No konkluzija (Sr) nije istinita. Naveli smo protuprimjer, odnosno model u kojemu su premise istinite a konkluzija neistinita, i stoga $\forall x(Sx \rightarrow \exists y(Gy \wedge Uyx)), \exists x(Gx \wedge Uxr) \not\models Sr$

$\therefore$