

I. Dokažite sljedeće zaključke metodom *prirodne dedukcije*, a za zadatke 1.-7. provjerite i istinosnom tablicom postoji li tumačenje u kojemu je skup premisa istinit, a konkluzija neistinita!

1. Roman će ove godine planinariti ili će se skijati. Stoga će Roman će ove godine planinariti, jer se neće skijati. (P, S)
2. Michelangelo Buonarroti nije poznavao Leonarda da Vinci ili su oba živjeli u Firenzi u isto vrijeme. Michelangelo Buonarroti poznavao je Leonarda da Vinci. Pa su tako oba živjela u Firenzi u isto vrijeme. (P, Z)
3. Martin je dobronamjerman i mlad ili je naivan. No, on nije mlad, i stoga je naivan. (D, M, N) (U ovom dokazu koristite DS (disjunktivni silogizam) kao pravilo koje ste dokazali u prethodnim zadacima!)
4. Branka se riješila straha od vode ili se riješila straha od otvorenih prostora. Ako se riješila straha od vode, onda joj je lakše u životu. A, lakše joj je u životu ako se riješila i straha od otvorenih prostora. Dakle, Branki je lakše u životu. (V, O, L)
5. Vrapci su monogamne ili poligamne ptice. Ako su vrapci poligamne ptice, onda narušavaju javni moral. Stoga ako vrapci nisu monogamne ptice, onda narušavaju javni moral. (M, P, J) (U ovom dokazu koristite DS (disjunktivni silogizam) kao pravilo koje ste dokazali u prethodnim zadacima!)
6. Joža voli Katicu ili voli Danicu. Dakle, nije slučaj da ne voli nijednu od njih. (Vxy, j, k, d)
7. Ni Danica ni Katica ne vole Jožu. Dakle, nije slučaj da Danica ili Katica vole Jožu. (Vxy, j, k, d)
8. Ernest pripada vrsti najvećih mačaka na svijetu. Naime, ako je Ernest tigar, on je Sibirski ili je Južnokineski. Ako je Ernest sibirski tigar, onda pripada vrsti najvećih mačaka na svijetu. No, Ernest jest tigar, no nije južnokorejski. (Mx, Tx, Sx, Jx, e) (U ovom dokazu koristite DS (disjunktivni silogizam) kao pravilo koje ste dokazali u prethodnim zadacima!)
9. Svi Pigmeji ili Bušmani skupine su s mutacijom M60. Svi muškarci plemena !Kung su Bušmani. Prema tome, svi muškarci plemena !Kung pripadaju skupini s mutacijom M60. $(Px, Bx, Sxy$ (za 'x je skupina s mutacijom y'), Mx, Kx, m (za 'M60'))
10. Svi Pigmeji ili Bušmani pripadaju skupini s mutacijom M60. Nijedan Velšanin ne pripada skupini s mutacijom M60. Prema tome, nijedan Velšanin nije ni Pigmej ni Bušman. $(Px, Bx, Sxy$ (za 'x je skupina s mutacijom y'), Vx, m (za 'M60')) (U ovom dokazu koristite MT (modus tollens) i DeM (De Morganov zakon) kao pravila koja ste dokazali u prethodnim zadacima!)
11. Neki su ljudi ljudožderi. Svi su ljudi razumni. Dakle, neki su ljudožderi razumni. (Cx, Lx, Rx)
12. Svi su vrapci mužjaci ili ženke. Dakle, ako neki vrapac nije mužjak, on je ženka. (Vx, Mx, Zx)
13. Svaki pacifist zagovara mir. Netko niti zagovara mir, niti zagovara rat. Stoga, neki koji ne zagovaraju rat nisu pacifisti. (Px, Zxy, m, r)
14. Svaki pacifist zagovara mir. Netko niti zagovara mir, niti zagovara rat. Stoga, tko god ne zagovara mir niti rat, nije pacifist. (Px, Zxy, m, r)

(rješenja posljednja dva zadatka samo su opisana riječima)

Krnja rješenja:

(Uvijek postoji više načina na koje je moguće izvesti dokaz! U ovim smjericama naznačen je jedan mogući put)

1.

Prijevod zaključka: $P \vee S, \neg S \vdash P$

(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom *disjunktivni silogizam (DS)*)

Dokaz:

1	$P \vee S$	pretp.
2	$\neg S$	pretp.
3	P	...
4	...	3/ op.
5
6	$\neg P$...
7
8
9
10	P	...

2.

$\neg P \vee Z, P \vdash Z$

(dokaz je gotovo jednak prethodnom)

1	$\neg P \vee Z$	pretp.
2	P	pretp.
3		...
4
5
6
7
8
9
10	Z	...

3.

$(D \wedge M) \vee N, \neg M \vdash N$

koristite DS kao pravilo!

1	$(D \wedge M) \vee N$	pretp.
2	$\neg M$	pretp.
3	...	pretp.
4
5
6
7	...	1, 6/ DS

4.

$V \vee O, V \rightarrow L, O \rightarrow L \vdash L$

1	$V \vee O$	pretp.
2	$V \rightarrow L$	pretp.
3	$O \rightarrow L$	pretp.
4
5
6
7
8	L	...

5.

$M \vee P, P \rightarrow J \vdash \neg M \rightarrow J$

1	$M \vee P$	pretp.
2	$P \rightarrow J$	pretp.
3	$\neg M$...
4
5
6

6.

$Vjk \vee Vjd \vdash \neg(\neg Vjk \wedge \neg Vjd)$

(Ovi su iskazi istovrijedni (iako je ovdje dokazan samo jedan smijer), a pretvaranje jednog u drugi (općenito: pretvaranje \vee u \wedge i obrnuto) poznato je pod nazivom *De Morganov zakon (DeM)*)

1	$Vjk \vee Vjd$...
2
3
4
5
6
7
8
9
10

7.

$\neg Vjk \wedge \neg Vjd \vdash \neg(Vjk \vee Vjd)$

(Ovi su iskazi istovrijedni (iako je ovdje dokazan samo jedan smijer), a pretvaranje jednog u drugi (općenito: pretvaranje \vee u \wedge i obrnuto) poznato je pod nazivom *De Morganov zakon (DeM)*)

1	$\neg Vjk \wedge \neg Vjd$...
2		...
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

8.

$Te \rightarrow (Se \vee Je), Se \rightarrow Me, Te \wedge \neg Je \vdash Me$

(u ovome se dokazu koristi DS umjesto $i\vee$)

1		...	pretp.
2		...	pretp.
3		...	pretp.
4			...
5			...
6			...
7			...
8			... / $i\rightarrow$

9.

$\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm), \forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Bx)$

$\vdash \forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Sxm)$

1	
2	
3			...
4			...
5			...
6			...
7			...
8			...
9			...

10.

$\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm), \forall x(Vx \rightarrow \neg Sxm)$

$\vdash \forall x(Vx \rightarrow (\neg Px \wedge \neg Bx))$

1	
2	
3			...
4			...
5			...
6			... / MT
7			... / DeM
8			...

11.

$\exists x(Cx \wedge Lx), \forall x(Cx \rightarrow Rx) \vdash \exists x(Lx \wedge Rx)$

1		...	pretp.
2		...	pretp.
3			... / $Ca \wedge La$ pretp.
4			...
5			...
6			...
7			...
8			...
9			... / $u\exists$
10			... / $i\exists$

12.

$\forall x(Vx \rightarrow (Mx \vee Zx)) \vdash \forall x((Vx \wedge \neg Mx) \rightarrow Zx)$

1		...	pretp.
2			...
3			...
4			...
5			...
6			...
7			... / DS
8			... / $u\forall$

Dokazi opisani riječima:

- U disjunktivnom sudu ne znamo koji je od disjunktata istinit, no znademo da je barem jedan, pa, ako jedan od njih nije istinit, drugi jest. Ovu vrst zaključka nazivamo disjunktivnim silogizmom (DS). No i to možemo dokazati u sustavu prirodne dedukcije, kao što ste vi učinili: premise u zaključku su - Roman će ove godine planinariti ili će se skijati. Roman se ove godine neće skijati. Konkluzija zaključka je: Roman će ove godine planinariti. Opis dokaza: (ako iz oba disjunktata slijedi isti sud, onda on slijedi i iz disjunktacije) Pretpostavimo da je istinit prvi disjunkt: (2) da će Roman planinariti. Iz toga slijedi (3) da će planinariti. Pretpostavimo drugi disjunkt, tj. (4) Roman će ići na skijanje, (OPREZ: već je jasno da ovo protuslovi (2), pa pod ovom pretpostavkom možemo izvesti što god želimo - ex falso quodlibet), i znajući da pod ovom pretpostavkom možemo izvesti što hoćemo pretpostavljamo: (5) Roman neće ići na planinarenje, a ispod upisujemo (zbog 2 i 4) \perp pa izvodimo (6) Roman će ići na planinarenje;... i tako smo iz oba disjunktata izveli isto, pa i iz disjunktacije to izvodimo (7)
- Jednako kao i 1.
- Gotovo jednako kao i 1. i 2. Razlika je u tome što iz suda: 'Martin nije mlad', trebate izvesti sud 'Nije slučaj da je Martin dobronamjerman i mlad', a to ćete učiniti tako da pretpostavite da jest dobronamjerman i mlad, učete u protuslovlje, te zaključite na nijek pretpostavke.
- U prvoj premisi tvrdimo da se Branka riješila barem jednog od dvaju strahova. Sljedeće dvije premise tvrde da je Branki lakše u životu ako se riješila bilo kojega od ta dva straha. Stoga, je u svakom slučaju B. lakše u životu.
- Dokaz započinjemo pretpostavkom: (3) Vrapci nisu monogamne ptice. Kako prva premisa glasi da su monogamne ili poligamne, slijedi (4) da su poligamne (DS). Nadalje, (prema 2) slijedi (5) da narušavaju javni moral. Stoga i, ako (3), onda (5)
- Premisa: (1) Joža voli bar jednu od njih. Dokaz započinjemo pretpostavkom da (2) Joža ne voli nijednu od njih. Dodatno pretpostavimo da (3) voli Katicu, no prema početnoj pretpostavci (4) ju ne voli: dakle, (5) protuslovlje. Dodatno pretpostavimo i drugi disjunkt, (6) da voli Janicu, no i to protuslovi pretpostavci. Stoga je pod početnom pretpostavkom premisa neodrživa (9), pa (10) zaključujemo na njezin nijek.
- Jednako kao i 6. no dodatno pretpostavljamo disjunktaciju i pokazujemo da je neodrživa, pa zaključujemo na njezin nijek.
- (4) Ernest je tigar (prema 3), pa je stoga (5) sibirski ili je južnokineski (prema 4 i 1), no (6) nije južnokorejski (prema 3), pa je stoga (7) sibirski (prema 5 i 6). Iz toga je jasno da (8) pripada vrsti najvećih mačaka na svijetu (prema 2 i 7).
- Kako konkluzija koju želimo izvesti jest 'Ako je netko muškarac i iz plemena !Kung, onda on pripada skupini s mutacijom M60', dokaz započinjemo pretpostavkom: (3) Ante je muškarac i Ante je iz plemena !Kung. Ako su svi muškarci iz toga plemena Bušmani, onda je (5) to i Ante. Nadalje, prema (1), slijedi (6) - bilo da je Ante Pigmej, bilo da je Bušmanin, pripada skupini... Stoga (8) Ante pripada toj skupini. Kako je umjesto Ante mogao stajati

bilo tko, zaključujemo isto za sve (poopćavamo): (9) Tkogod je muškarac iz toga plemena, pripada toj skupini.

- Dokaz je sličan 9.: Kako je konkluzija koju želimo izvesti: 'Tko je Velšanin, nije ni Pigmej niti Bušmanin', tako krećemo od pretpostavke (3) Ante je Velšanin i stoga, (5) ne pripada skupini s mutacijom M60. A kako je biti pripadnik skupine s mutacijom M60 nužan uvjet za biti Pigmej ili Bušmanin, a Ante ne pripada toj skupini, slijedi da Ante nije takav da je Pigmej ili Bušmanin. Sada, reći da 'Ante nije takav da je Pigmej ili Bušmanin', isto je što i reći (7) 'Ante nije Pigmej niti je Bušmanin' (De Morganov zakon - v. zadatke 6. i 7.). Kako je umjesto Ante mogao stajati bilo tko, možemo poopćiti (8): Tko je Velšanin, nije Pigmej niti je Bušmanin.
- Dokaz započinje pretpostavkom: (3) 'Ante je čovjek i ljudožder'. Stoga je i (6) razuman, jer (5) ako je čovjek, onda je razuman, a (4) čovjek je prema pretpostavci. Nadalje, prema pretpostavci je i (7) ljudožder, dakle, Ante je razuman i ljudožder. Sada, ne možemo, bez pretpostavke (3) to tvrditi, jer ne znamo je li to Ante doista, no znademo da je **netko**, stoga poopćavamo (9) 'Neki ljudožderi su razumni', a kako ne znamo je li to i Ante, no znademo da je netko, i bez pretpostavke možemo tvrditi da (10) su neki ljudožderi razumni.
- Dokaz započinjemo pretpostavkom: (2) Andrija je vrabac i nije mužjak. Prema premisi slijedi: (3) Ako je Andrija vrabac, onda je on mužjak ili je ženka, a kako (4) je vrabac (prema 2), znademo da (5) jest muškarac ili ženka. Kako, prema pretpostavci, (6) nije mužjak, (7) ženka je. No umjesto Andrije mogao je stajati bilo tko, pa zaključujemo: (8) Ako neki vrabac nije mužjak, on je ženka.
- Dokaz započinjemo pretpostavkom: (3) Andrija ne zagovara mir niti zagovara rat. A prema (1) znamo da (4) ako je Andrija pacifist, onda zagovara mir. Kako (5) Andrija ne zagovara mir (iz 2), slijedi da (6) Andrija nije pacifist. Kako znamo da (7) ne zagovara rat (prema 2), slijedi da (8) Andrija ne zagovara rat i nije pacifist. Sada, ne bi bilo dobro optužiti Andriju za to bez pretpostavke (3). Mi, naime, ne znamo je li sve to Andrija doista, no znamo da je netko. Andrija nam je samo privremeno koristio, no ukoliko hoćemo izaći iz poddokaza moramo ga se riješiti. Stoga možemo poopćiti, (9) Netko ne zagovara rat i nije pacifist. Na kraju možemo izaći iz poddokaza, jer znamo da sigurno netko ne zagovara mir niti rat, i iako ne znamo tko, to nam je dovoljno da zajedno sa prvom premisom ustvrdimo i bez pretpostavke (2), (10) Netko tko ne zagovara rat nije pacifist.
- Uočite da nam za ovaj dokaz druga premisa uopće nije potrebna: Uzmimo samo rečenicu (1) 'Svaki pacifist zagovara mir'. Dodatno pretpostavimo da (2) Ana ne zagovara mir niti zagovara rat. Znamo, dakle, da (3) Ana ne zagovara mir, pa stoga (5) nije pacifist. Kako je umjesto Ane mogao stajati bilo tko, možemo zaključiti: (6) Tko ne zagovara mir niti zagovara rat, nije pacifist.