I. Dokažite sljedeće zaključke metodom *prirodne dedukcije*, a za zadatke 1.-7. provjerite i istinosnom tablicom postoji li tumačenje u kojemu je skup premisa istinit, a konkluzija neistinita!

1. Ako je Branka naučila plivati, onda se riješila straha od vode. No, Branka se nije riješila straha od vode, pa prema tome, nije naučila plivati. (P, R)

2. Branka je naučila plivati samo ako se riješila straha od vode. Stoga, ako se Branka nije riješila straha od vode, onda nije naučila plivati. (P, R)

3. Ako će se povisiti prosječna temperatura na Zemlji, na njoj će biti više tekuće vode nego sada. Naime, ako će se povisiti prosječna temperatura na Zemlji, ledene kape će se otopiti. A ako se ledene kape otope, na Zemlji će biti puno više tekuće vode nego što je sada.(P, V, O)

4. Ako neće na Zemlji biti više tekuće vode nego sada, onda se na njoj neće povisiti prosječna temperatura. Naime, ako će se povisiti prosječna temperatura na Zemlji, ledene kape će se otopiti. A na Zemlji neće biti puno više tekuće vode nego što je sada samo ako se ledene kape ne otope.(P, V, O)

5. Željko je razmišljao: "Poći ću na more, ali se neću kupati. No, kupat ću se ako pođem na more."(M, K) Dokažite da je Željkovo razmišljanje protuslovno!

6. π je prirodan broj samo ako je pozitivan i cijeli. No π nije cijeli broj, pa nije ni prirodan.(N, P, C)

7. Ako je π pozitivan i cijeli broj, onda je i prirodan. Stoga, ako je π pozitivan broj, onda je i cijeli samo ako je prirodan.(N, P, C)

8. Svaki je Marsovac živo biće porijeklom s Marsa. Svakom živom biću porijeklom s Marsa rogovi rastu na glavi. Dakle, svakom Marsovcu rogovi rastu na glavi.(Mx, Pxm, Rx)

9. Ako nekomu ne rastu rogovi na glavi, on nije Marsovac. Naime, tkogod nije živo biće porijeklom s Marsa nije ni Marsovac, a svakom živom biću porijeklom s Marsa rogovi rastu na glavi.(Mx, Pxm, Rx)

10. Sve su morske krave sirene, stoga nijedna krava nije morska krava, jer nijedna krava nije sirena. (Mx, Sx, Kx)

11. Štogod nije plavo, nije ni tirkizno. Ništa plavo nije crveno. Stoga, ništa crveno nije tirkizno.(Px, Tx, Cx)

Krnja rješenja:

1.

Prijevod zaključka: $P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$

(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom ***modus tollens*** **(MT)**)

Dokaz:

1	$P \to R$	pretp.
2	$\neg R$	pretp.
3	...	$\dots$
4	...	$\dots$
5	...	$\dots$
6	$\neg P$	$\dots$

2.

$P \to R \vdash \neg R \to \neg P$

(***kontrapozicija***, uočite sličnost sa 1.)

1	$P \to R$	pretp.
2	$\neg R$	pretp.
3	...	$\dots$
4	...	$\dots$
5	...	$\dots$
6	...	$\dots$
7	$\neg R \to \neg P$	$\dots$

3.

$P \to O, O \to V \vdash P \to V$

(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom ***hipotetički silogizam*** **(HS)**ili ***lančani zaključak***)

1	$P \to O$	pretp.
2	$O \to V$	pretp.
3	...	pretp.
4	...	$\dots$
5	...	$\dots$
6	$P \to V$	$\dots$

4.

$P \to O, \neg V \to \neg O \vdash \neg V \to \neg P$

(Uočite vezu s kontrapozicijom i hip. silogizmom!)

1	$P \to O$	pretp.
2	$\neg V \to \neg O$	pretp.
3	...	pretp.
4	...	$\dots$
5	P	$\dots$
6	...	$\dots$
7	...	$\dots$
8	...	$\dots$
9	$\neg V \to \neg P$	$\dots$

5.

$P \land \neg K, P \to K \vdash \bot$

1	$P \to K$	pretp.
2	$P \land \neg K$	pretp.
3	...	i$\land$
4	...	$\dots$
5	...	$\dots$
6	$\bot$	$\dots$

6.

$N \to (P \land C), \neg C \vdash \neg N$

1	$N \to (P \land C)$	pretp.
2	$\neg C$	pretp.
3	...	$\dots$
4	...	$\dots$
5	...	$\dots$
6	...	$\dots$
7	$\neg N$	$\dots$

7.
$(P \land C) \to N \vdash P \to (C \to N)$

1	$(P \land C) \to N$	pretp.
2	$\quad P$	pretp.
3	$\quad\quad$ ...	
4	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
5	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
6	$\quad$ ...	$\ldots$
7	$P \to (C \to N)$	$\ldots$

8.
$\forall x(Mx \to Pxm), \forall x(Pxm \to Rx) \vdash \forall x(Mx \to Rx)$
(Uočite vezu s HS)

1	$\forall x(Mx \to Pxm)$	pretp.
2	$\forall x(Pxm \to Rx)$	pretp.
3	$a \quad Ma$	pretp.
4	$\quad$ ...	$\ldots$
5	$\quad$ ...	$\ldots$
6	$\quad$ ...	$\ldots$
7	$\quad$ ...	$\ldots$
8	$\forall x(Mx \to Rx)$	$\ldots$

9.
$\forall x(Mx \to Sx), \forall x(Kx \to \neg Sx) \vdash \forall x(Kx \to \neg Mx)$
(Uočite vezu s kontrapozicijom i HS)

1	$\forall x(Mx \to Sx)$	pretp.
2	$\forall x(Kx \to \neg Sx)$	pretp.
3	$a \quad Ma$	pretp.
4	$\quad$ ...	$\ldots$
5	$\quad$ ...	$\ldots$
6	$\quad\quad Ka$	$\ldots$
7	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
8	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
9	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
10	$\quad$ ...	$\ldots$
11	$\forall x(Mx \to \neg Kx)$	$\ldots$

10.
$\forall x(\neg Px \to \neg Tx), \forall x(Px \to \neg Cx) \vdash \forall x(Cx \to \neg Tx)$
(Uočite sličnost s 9.)

1	$\forall x(\neg Px \to \neg Tx)$	pretp.
2	$\forall x(Px \to \neg Cx)$	pretp.
3	$a \quad Ca$	$\ldots$
4	$\quad\quad Pa$	$\ldots$
5	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
6	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
7	$\quad\quad$ ...	$\ldots$
8	$\quad$ ...	$\ldots$
9	$\quad$ ...	$\ldots$
10	$\quad$ ...	$\ldots$
11	$\forall x(Cx \to \neg Tx)$	$\ldots$

Neki dokazi opisani riječima:

1. (3) pretpostavimo da je Branka naučila plivati. No, onda se (4)riješila straha od vode (prema 1 i 3), no to protuslovi našoj drugoj premisi (2) prema kojoj se nije oslobodila toga straha. Iz toga zaključujemo da je naša pretpostavka (3) bila pogrešna pa zaključujemo na njezin nijek.

2. Jednako kao i 1., samo što nam nijek nužnog uvjeta nije u skupu početnih premisa, već je dodatna pretpostavka. - uočite sličnost!

3. Konkluzija zaključka je prva rečenica. Dokaz započinjemo pretpostavljajući njezin antecedens: (4)Prosječna temperatura na Zemlji će se povisiti. Sad, pod tom pretpostavkom slijedi i (5) da će se ledene kape otopiti (prema 4 i 1), a iz toga slijedi da (6) će na Zemlji biti puno više tekuće vode nego sada (prema 5 i 2). Iz toga izvodimo: ako (4) onda (6).

4. Morate koristiti spoznaje iz 2. i 3. zadatka.

5. Željkove su tvrdnje očigledno protuslovne. Razmislite bi li bilo protuslovno ovakvo razmišljanje: "Neću se kupati ako pođem na more. Kupat ću se ako pođem na more."

6. Konkluzija zaključka u tekstu je posljednja rečenica. U prvoj premisi tvrdi se da je nužan uvjet za biti prirodnim brojem, biti pozitivan i cijeli broj. No u drugoj se primisi tvrdi da π nije cijeli, pa prema tome nije takav da je pozitivan i cijeli. Iz ove spoznaje lako, (modus tollens) dolazimo do suda da π nije prirodan broj.

8.,9.,10.,11. Jedino što bi moglo zbuniti u ovim zadacima je uvođenje $\forall$: Uzmimo npr. 8. zadatak: U (3) koraku uzeli smo neko, bilo koje ime - Ante, i pretpostavili da je Marsovac. U (7) koraku pod tom smo pretpostavkom došli do toga da Anti rogovi rastu na glavi. No, kako je umjesto Ante mogao stajati bilo tko (Branko, Joža...), izvodimo da to vrijedi za svakoga.