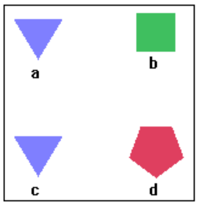
Složeni sudovi i njihova semantika; Prirodna dedukcija (PD)

Svijet 1 je svijet (domena, predmetno područje) na kojemu ćemo vježbati semantiku logičkih veznika. Ključ prevođenja: **a**,**b**,**c**,**d** su imena predmeta u Svijetu 1 kako su označena.
Tx za 'x je trokut.'
Px za 'x je peterokut.'
Kx za 'x je kvadrat.'
Gx za 'x je geometrijski lik'

Svijet 1



Definicije triju logičkih odnosa:

Jedan sud **logički slijedi** iz drugoga (ili drugih) ako *ne postoji tumačenje u kojemu je sud koji slijedi neistinit, a sud (ili skup sudova) iz kojih slijedi istinit* (za oznaku logičkog slijeda koristiti ćemo znakove $\vdash$ ili $\vDash$)

Dva su suda **istovrijedna** ako u svakom tumačenju elementarnih sudova *imaju jednaku istinitinosnu vrijednost*, odnosno, dva su suda istovrijedna ukoliko je iz prvog moguće izvesti drugi i iz drugog prvi (drugi logička posljedica prvoga i prvi je logička posljedica drugoga) (za oznaku istovrijednosti među sudovima koristit ćemo znak $\equiv$)

Dva su suda **protuslovna** jedan drugome ako u svakom tumačenju elementarnih sudova od kojih se sastoje *imaju različitu istinitinosnu vrijednost*, tj. ako je jedan od sudova **negacija** drugoga. (za oznaku protuslovlja koristit ćemo znak $\perp$)

1. $\neg$ ('ne') – Nijek (negacija)

	P	$\neg P$
1. tumačenje	i	n
2. tumačenje	n	i

Nijek suda '**a** je trokut.' (Ta)možemo izraziti na različite načine, npr. '**a** nije trokut.' ($\neg Ta$), 'Nije slučaj da je **a** trokut'($\neg Ta$), ili, iako neobično zvuči, '**a** je ne-trokut'. Svi su oni protuslovni prvome. Sud 'Nije slučaj da **a** nije trokut' ($\neg\neg Ta$) njima je protuslovan, a istovrijedan je našem početnom sudu. Drugim riječima, nijek nijeka (tj. dvostruka negacija) jest afirmacija. Na taj način možemo graditi sudove u beskonačnost.

Istovrijedni su sudovi: '**a** je trokut' (Ta), 'Nije slučaj da **a** nije trokut'($\neg\neg Ta$), 'Nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da **a** nije trokut' ($\neg\neg\neg\neg Ta$), 'Nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da **a** nije trokut' ($\neg\neg\neg\neg\neg\neg Ta$), itd. (uočite da su svi oni istiniti)
Njima **protuslovni**, a *međusobno istovrijedni*, sudovi su: '**a** nije trokut'($\neg Ta$), 'Nije slučaj da nije slučaj da **a** nije trokut'($\neg\neg\neg Ta$), 'Nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da nije slučaj da **a** nije trokut'($\neg\neg\neg\neg\neg Ta$), itd (uočite da su svi oni neistiniti)

(**uočite!** da paran broj negacija jest afirmacija suda ispred kojega se nalaze, dok je neparan broj negacija ispred suda negacija toga suda)

[**Prirodna dedukcija**: pravila za isključenje nijeka ($i\neg$) i njegovo uvođenje ($u\neg$)]

$i\neg$

1	$\ldots$	
2	$\neg\neg P$	
3	P	2/ i$\neg$

$u\neg$

1	$\ldots$	
2	$\quad P$	
3	$\quad \ldots$	
4	$\quad \neg Q$	
5	$\quad Q$	
6	$\quad \bot$	4, 5/ u$\bot$
7	$\neg P$	2–6/ u$\neg$

Objašnjenje $u\neg$: U dokazu pretpostavimo npr. P, te ako pod tom pretpostavkom uđemo u proturječje (tj. negdje primjetimo npr. Q , a drugdje u dokazu primjetimo $\neg Q$), upisujemo $\bot$ (znak za proturječje). To znači da je naša pretpostavka neodrživa (jer vodi u proturječje) pa zaključujemo na njezin nijek.

Zadatak: Razmislite malo o pravilima $u\neg$ i $u\bot$! Može vam pomoći ovaj primjer: *Ako je Marica bila u Splitu, ona je bila barem u jednom gradu na moru. No, Marica nije bila niti u jednom gradu na moru.* Bismo li ušli u proturječje kada bismo pretpostavili da je Marica bila u Splitu? Što bi protuslovilo čemu? Što, stoga, moramo zaključiti?

2. $\rightarrow$ ('Ako…, onda…') - materijalna implikacija; Hipotetički sud, Kondicional, Pogodba

Sud s lijeve strane strelice nazivamo ***antecedens (prednjak)***, a sud s desne strane nazivamo ***konsekvens (posljedak)***. Mjesto sudova koje povezuje nije proizvoljan za razliku od $\vee$ i $\wedge$.
Implikacija je *neistinita samo u onom tumačenju* u kojemu je *antecedens* (prvi član, dostatan uvjet) *<u>istinit</u>*, a *konzekvens* (drugi član, nužan uvjet) *<u>neistinit</u>*.

	P	Q	$P \rightarrow Q$
1. tumačenje $(P \wedge Q)$	i	i	i
2. tumačenje $(P \wedge \neg Q)$	**i**	**n**	**n**
3. tumačenje $(\neg P \wedge Q)$	n	i	i
4. tumačenje $(\neg P \wedge \neg Q)$	n	n	i

Mogući veznici za implikaciju u običnom jeziku:
ako...onda...; … ako…; …samo ako..; … osim ako …; ukoliko…,utoliko…

Od svih tumačenja logičkih veznika ovaj je, čini se, najteži za prihvatiti, zato je potrebno dodatno objašnjenje:
Kada upotrebljavate izraz 'ako…onda' pod time mislite: ako je X istina, onda je i Y istina; a rekli ste neistinu samo ako X jest istina, a Y nije. Tako prva dva tumačenja nisu dvojbena.

*No što je s **trećim tumačenjem**?*
Primjer 1:
Ako bi tkogod rekao: 'Ako će Marko poći na tečaj plivanja (P), onda će naučiti plivati (Q)', prihvatili bismo kao istinitu i u slučaju u kojemu Marko nije pošao na tečaj plivanja ($\neg P$), a naučio je plivati (Q) (npr. naučio je plivati sam za vrijeme ljetnih praznika). Ili,
Primjer 2:
Sud 'Ako prema pješačkom prijelazu velikom brzinom jure automobili, Marko ga neće prijeći.' ne dovodi u pitanje činjenica da npr. prema zebri velikom brzinom ne jure automobili, a Marko je ne prelazi.

*A što je s **četvrtim tumačenjem**?*
Primjer 3:
Sud: 'Ako je Ulrike bila u Zagrebu, onda je bila u Hrvatskoj' doživljavamo kao istinit i u slučaju u kojemu Ulrike nije bila u Zagrebu, niti u Hrvatskoj (to je četvrti slučaj) .
Primjer 4:
*Razmislite što hoćete reći kada kažete nekome: **'Ako ti znaš matematiku, onda svi znaju matematiku'**: vi, dakako pretpostavljate da ne znaju svi matematiku, no svoju tvrdnju smatrate istinitom, a to je moguće samo ako osoba kojoj se obraćate ne zna matematiku, a što je ono što ste joj htjeli, na lijep način, reći.*

Uz četvrto tumačenje povezan je zanimljiv odnos elemenata implikacije:
Uočite odnos između antecedensa (dostatnog uvjeta) i konsekvensa (nužnog uvjeta)!

U sudu $P \to Q$ (implikaciji, hipotetičkom sudu), kažemo da je P *dostatan uvjet* za ostvarenje Q, a Q da je *nužan uvjet* za ostvarenje P. Što to znači? Neka nam ovi sudovi bude primjerima: *'Ako je Rex pas, Rex je životinja.'* (ili poopćeno: *'Ako je nešto pas, to je životinja'*, odnosno *'Svi psi su životinje.'*)
Njime tvrdimo da je činjenica da je Rex pas ***dovoljan (dostatan) uvjet*** za 'biti životinjom' (no životinja ima i drugih, poput konja, mačaka, svinja, kokoši itd.)
S druge strane, njime tvrdimo da je 'biti životinjom' ***nužan uvjet*** da bi se bilo psom. Odnosno, nemoguće je da je Rex pas a da nije životinja, stoga, *ako nije životinja, nije ni pas.*
Iz ovoga je razloga reći $P \to Q$, jednako kao i reći $\neg Q \to \neg P$; u našem primjeru, jednako je reći 'Ako je Rex pas, onda je on životinja' i 'Ako Rex nije životinja, onda nije ni pas', (ili 'Svi psi su životinje' i 'Štogod nije životinja nije ni pas.'). Ovu pretvorbu nazivamo ***kontrapozicija***

Zadatak: Pokažite istinitosnom tablicom da su sudovi $P \to Q$ i $\neg Q \to \neg P$ jednakovrijedni ($\equiv$), a nakon što ćemo raditi pravila PD za implikaciju, i njome!

Napomena o prevođenju sa običnog jezika: Veznici **„ako..., onda..."** (ili: „... ako...) i „**samo ako**" **različito se prevode**: „ako..." nam ukazuje da nakon njega slijedi **dostatan uvjet**, a veznik „samo ako" da nakon njega slijedi **nužan uvjet**.

Primjer 5
Sudovi 'Ako vidim Sunce, onda je dan' i 'Samo ako vidim Sunce, dan je' tvrde različito i mi ih doživljavamo različitima – prvi kao istinit, a drugi kao neistinit. U prvom slučaju tvrdimo da je 'vidjeti Sunce' *dostatan uvjet* za ustvrditi da je dan, no ne i nužan (dan može biti i u slučaju u kojemu ne vidimo Sunce, kada je npr. oblačno). U drugom slučaju tvrdimo da je 'vidjeti Sunce' *nužan uvjet* za tvrdnju da je dan („samo u slučaju u kojem vidim Sunce..."), što prepoznajemo kao neistinu. Tako prvi sud prevodimo: $V \to D$, a drugi: $D \to V$.

Ovo je važno i za razumijevanje složenijega veznika „***ako i samo ako***": Kada tvrdimo *'Q ako i samo ako P'*, tvrdimo da je P i dostatan i nužan uvjet za Q: $P \leftrightarrow Q$. Time zapravo tvrdimo: *'Q ako P, i Q samo ako P'* tj. $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$.

Zadatak: Napravite istinosnu tablicu za $P \leftrightarrow Q$.

Vježba $\longrightarrow$***: jesu li sljedeći sudovi istiniti u Svijetu 1?***

Zadani sud:	Prijevod na $\mathcal{L}_p$	Postupak	i/n
1.1. Ako **a** nije trokut, **b** je trokut.			
1.2. Ako **b** nije trokut, **a** je trokut			
2.1. Ako je **a** trokut, **b** nije trokut			
2.2. Ako je **b** trokut, **a** nije trokut			
3.1. Ako je **a** trokut, **c** nije trokut			
3.2. Ako je **c** trokut, **a** nije trokut			
4. Ako je **b** trokut, nije kvadrat.			
5. Samo ako je **b** trokut, nije kvadrat.			
7.1. **d** je peterokut ako je trokut.			
7.2. **d** je peterokut ako je nije trokut.			
7.3. **d** je peterokut samo ako je trokut.			
7.4. **d** je peterokut samo ako nije trokut.			

Pitanje: Koji su parovi zadataka primjeri kontrapozicije?

[**Prirodna dedukcija**: pravila za isključenje implikacije (i $\longrightarrow$) i njezino uvođenje (u $\longrightarrow$)]

1	…	
2	$P \to Q$	
3	P	
4	Q	2, 3/ i$\to$

1	…	
2	P	pretp.
3	…	
4	Q	
5	$P \to Q$	2–4/ u$\to$

Pitanje: Na temelju čega možemo postaviti ova pravila, tj. na temelju čega možemo biti sigurni da je istina očuvana?

3. $\wedge$ ('i') – Konjunkcija (lat. conjungere – spojiti); Konjunktivni sud

Članove konjunkcije nazivamo *konjunktima*

Neki je konjunktivni sud istinit ako i samo ako su **svi konjunkti istiniti** (utoliko je konjunkcija najinformativniji veznik (samo je u jednom slučaju istinita; neka je rečenica je informativnija od druge ukoliko je od nje u više tumačenja neistinita))

	P	Q	$P \wedge Q$
1. tumačenje	i	i	i
2. tumačenje	i	n	n
3. tumačenje	n	i	n
4. tumačenje	n	n	n

Mogući veznici za konjunkciju u običnom jeziku:
i, pa, te, a, nego, već, no, premda, dok, iako, kako...tako..., čak i, i...i...
- s negacijom: *ni, niti,*

Vježba $\wedge$ – jesu li sljedeći sudovi istiniti?

Zadani sud:	Prijevod na $\mathcal{L}_p$	Jedan protuprimjer (samo ako sud nije istinit)	i/n
1. I **a** i **b** su trokuti.			
2. **a** je trokut, ali **b** nije.			
3. **b** je trokut, dok **a** niti **c** nisu.			
4. **b** nije trokut, već su to **a** i **c**.			
5. Ni **b** ni **d** nisu trokuti, dok **a** i **c** jesu.			
6. Iako je **d** peterokut, **c** nije trokut.			

[**Prirodna dedukcija**: pravila za isključenje konjunkcije ($i \wedge$) i njezino uvođenje ($u \wedge$)]

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \dots & \\
2 & P \wedge Q & \\
3 & P & 1/\ \mathrm{i}\wedge \\
4 & Q & 1/\ \mathrm{i}\wedge
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
1 & \dots & \\
2 & P & \\
3 & Q & \\
4 & P \wedge Q & 2,\ 3/\ \mathrm{u}\wedge
\end{array}
$$

Pitanje: Na temelju čega možemo postaviti ova pravila?

Kako je neki opći sud ($\forall$) poopćenje sudova o pojedinačnim predmetima koji stoje u konjunkciji, tako će i pravila za njegovo isključenje i uvođenje biti slična:

isključenje $\forall$ ($i\forall$) uvođenje $\forall$ ($u\forall$)

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \dots & \\
2 & \forall x Px & \\
3 & Pa & 2/\ \mathrm{i}\forall
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|ll}
1 & \dots & \\
2 & \quad \begin{array}{|l} (a) \\ \hline \end{array} & \\
3 & \quad \begin{array}{|l} \dots \end{array} & \\
4 & \quad \begin{array}{|l} Pa \end{array} & \\
5 & \forall x Px & 3\text{–}4/\ \mathrm{u}\forall
\end{array}
$$

Objašnjenje uvođenja:
U drugom retku uzeli smo bilo koje ime, te smo došli do toga da ono ima svojstvo *P*, no do toga bismo došli da smo uzeli i bilo koje drugo ime, pa stoga možemo tvrditi za sva imena. (ovo pravilo samo za sebe nije dovoljno razumljivo, no u zadacima će biti jasnije)

Zadatak: Na temelju čega možemo isključiti $\forall$?

4. $\vee$ ('ili'); (uključujuća) Disjunkcija (lat. disjungere: razdvojiti); Disjunktivni sud

Članove disjunkcije nazivamo *disjunktima*.
Neki je disjunktivni sud istinit ako i samo ako je **barem jedan** **od disjunkata istinit**.

	P	Q	$P \vee Q$
1. tumačenje	i	i	i
2. tumačenje	i	n	i
3. tumačenje	n	i	i
4. tumačenje	n	n	n

Neki mogući veznici za disjunkciju u običnom jeziku:
ili, bilo...bilo..., barem je jedan…,…

Vježba $\vee$: jesu li sljedeći sudovi istiniti?

Zadani sud:	Prijevod na $\mathcal{L}_p$	Primjer suda koji zadanu disjunkciju čini istinitom (samo ako je istinita)	i/n
1. **a** je trokut ili je **b** trokut.			
2. **a** nije trokut ili to nije **b.**			
3. **a** nije trokut ili **c** nije trokut			
4. **d** je peterokut ili je **b** kvadrat			
5. **a** je trokut, ili je **b** trokut, ili je **c** trokut			
6. Barem je jedan od **a**, **b**, **c**, i **d** peterokut.			

Uočite odnos između $\vee$ i $\longrightarrow$:

U disjunkciji tvrdimo da je *barem jedan* disjunkt istinit (P ili Q), stoga, ako neki od disjunkata nije istinit (npr. P), drugi mora biti istinit (Q).

I obrnuto, u implikaciji tvrdimo da ako je antecedens istinit i konzekvens mora biti istinit, stoga je sigurno barem jedno od ovoga dvoga istinito: antecedens je neistinit ili je konzekvens istinit. Kako ovo nije sasvim očigledno, navest ćemo primjer: *'Ako je Rex pas, Rex je životinja.'* neistinito je samo u slučaju u kojemu je Rex pas, a nije životinja; no reći *'Rex nije pas ili je Rex životinja.'* neistinito je isto samo u tom jednom slučaju (u kojem nijedan od disjunkata nije istinit).

Dakle: reći $P \vee Q$ jednako je što i reći $\neg P \rightarrow Q$ ili $\neg Q \rightarrow P$

Zadatak: Istinitosnim tablicama pokažite istovrijednost ovih dviju rečenica!

[**Prirodna dedukcija**: pravila za isključenje disjunkcije ($i\vee$) i njezino uvođenje ($u\vee$)]

1	…	
2	$P \vee Q$	
3	$\quad P$	pretp.
4	$\quad$ …	
5	$\quad R$	
6	$\quad Q$	pretp.
7	$\quad$ …	
8	$\quad R$	
9	R	2, 3–5, 6–8/ i∨

1	…	
2	P	
3	$P \vee Q$	2/ u∨

Zadatak: Oslanjajući se na istinosnu tablicu, pokažite da je pravilom $u\vee$ očuvana istina?

Kako je poseban sud ($\exists$) poopćenje sudova o pojedinačnim predmetima koji stoje u disjunkciji, tako će i pravila za njegovo isključenje i uvođenje biti slična:

isključenje $\exists$ ($i\exists$)

1	…	
2	$\exists x Px$	
3	$\quad (a)Pa$	pretp.
4	$\quad$ …	
5	$\quad Ga$	
6	$\quad \exists x Gx$	5/ u∃
7	$\exists x Gx$	2, 3–6/ i∃

Objašnjenje isključenja: U 2. retku stoji da je netko *P* (što je poopćenje od: 'Pa ili Pb ili...'). U 3. retku pretpostavljamo da **a** ima svojstvo *P* (no ne znamo ima li ga doista). U 5. (pomoću pretpostavke) dolazimo do toga da **a** ima i svojstvo *G* (i to možemo tvrditi samo uz gornju pretpostavku). No ukoliko se riješimo imena **a**, možemo izaći iz poddokaza. Mi, naime, ne znamo ima li **a** svojstvo *P* no sigurni smo da ga netko ima.

uvođenje $\exists$ ($u\exists$)

1	…	
2	Pa	
3	$\exists x Px$	2/ u∃

Zadatak: Na temelju čega možemo uključiti $\exists$? Kako bi ove sheme pravila izgledale na domeni od dva predmeta – **a** i **b**, kao pojedinačni sudovi o njima?

5. $\leftrightarrow$ ('ako i samo ako'); Ekvivalencija, Bikondicional

Ekvivalencija je <u>istinita</u> samo ako njezini članovi <u>imaju jednake istinitinosne vrijednosti</u> (bilo da su oba istiniti, bilo da su oba neistiniti). Možemo ju promatrati kao složen veznik koji tvrdi: jedan je sud i dostatan i nužan uvjet za drugi (strelica ide i od njega i ka njemu).

	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1. tumačenje $(P \wedge Q)$	i	i	i
2. tumačenje $(P \wedge \neg Q)$	i	n	n
3. tumačenje $(\neg P \wedge Q)$	n	i	n
4. tumačenje $(\neg P \wedge \neg Q)$	n	n	i

Ekvivalenciju ($P \leftrightarrow Q$) možemo promatrati kao obostranu implikaciju. Njome se zapravo tvrdi: **'** P ***ako*** Q **, i** P ***samo ako*** Q **'** (što simboliziramo: $(Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$) (**uočite!:** 'P, ako i samo ako Q': veznik ***'ako'*** obilježava antecedens, a veznik ***'samo ako'*** obilježava konsekvens)

Ekvivalencija je **logički oblik klasične definicije**. Npr. definicija *'Heksagon je geometrijski lik koji ima šest kutova i šest stranica'*, strogo logički glasila bi: *Nešto je heksagon ako i samo ako je geometrijski lik sa šest kutova i šest stranica.*':

$\forall x(Heksagon(x) \leftrightarrow (Geomlik(x) \wedge \check{S}esterokutan(x) \wedge \check{S}esterostrani\check{c}an(x)))$

Vježba $\leftrightarrow$ **:** ***jesu li zadani sudovi istiniti?***

Zadani sud:	Prijevod na $\mathcal{L}_p$	Postupak	i/n
1. **a** je trokut ako i samo ako je **b** trokut.			
2. Ako i samo ako je **a** trokut, i **c** je trokut.			
3. Ako je **b** trokut, i **d** je, i samo ako je **b** trokut, i **d** je trokut.			
4. **b** je trokut samo ako je **d** trokut, i **d** je trokut samo ako je **b** trokut.			
5. **b** je trokut ako i samo ako nije peterokut.			
6. **b** je trokut ako i samo ako nije kvadrat.			
7. **d** nije peterokut ako i samo ako nije peterokut.			

(uočite odnos prva četiri zadatka u Vježbi alternacija i Vježbi $\leftrightarrow$!)

6. ***Alternacija (isključujuća, odnosno ekskluzivna disjunkcija)***

Razlika uključujuće i isključujuće disjunkcije:
U svakodnevnom govoru često ne naglašavamo razliku između ove dvije vrste disjunktivnog suda jer te razlike podrazumijevamo.
Npr. Kada nas konobar upita hoćemo li kavu s toplim ili hladnim mlijekom podrazumijevamo da neće istodobno utočiti oba (podrazumijevamo $\neg(T \wedge H)$). To je isključujuća (ekskluzivna) disjunkcija (isključuje mogućnost istinitosti oba člana)

Kada pak kupujete sendvič, a prodavač vas upita koje priloge hoćete da stavi u njega: majonezu ili kisele krastavce, podrazumijeva se da možete zahtijevati da oba priloga stavi u sendvič. To je uključujuća (inkluzivna) disjunkcija (uključuje mogućnost istodobne istinitosti: $M \wedge K$, odnosno, moguće je zatražiti i majonezu i kisele krastavce)

Za *alternativni sud* nećemo rabiti poseban simbol, već ćemo ga izražavati drugim simbolima. U običnom jeziku, alternacija ima oblik: **'Ili..., ili...'** pri čemu se podrazumijeva da se sudovi međusobno isključuju, ***odnosno: složeni sud je istinit kad je samo jedan od alternanata (sudova koji su u alternaciji) istinit.***

*(uočite razliku!: **barem** jedan istinit (uključujuća disj.) – **samo** jedan istinit (isključujuća disj.))*

Primjer 1:
Kada kome kažete: ***'Ili ću izaći van, ili ću ostati kući.'*** *(pri tom ne mislimo da bi oboje moglo biti istinito kao što je slučaj u uključujućoj disjunkciji);*
Primjer 2:
'Ili ću proći, ili ću pasti razred' *(pri tom ne mislite da bi oboje moglo biti moguće)*

Alternaciju drugim veznicima možemo izraziti na više načina:

1. U Primjeru 1 zapravo je rečeno: ***'Izaći ću van ili ću ostati kući, no neću i izaći van i ostati kući'***, a to možemo prevesti: $(V \vee K) \wedge \neg(V \wedge K)$
2. Primjer 1 možemo protumačiti i ovako: ***'Izaći ću van, a neću ostati kući, ili neću izaći van i ostat ću kući.'***, a to možemo prevesti: $(V \wedge \neg K) \vee (\neg V \wedge K)$
3. Pomoću ekvivalencije ako su dva alternanta (pogledajte 'Ekvivalencija')

Vježba alternacija: jesu li zadani sudovi istiniti?

Zadani sud:	Prijevod na $\mathcal{L}_p$	Postupak	i/n
1. Ili je **a** trokut, ili je **b** trokut.			
2. Ili je **a** trokut, ili je to **c**.			
3. Ili je **b**, ili je **d** trokut.			
4. **b** je trokut ili je to **d**, no nisu oba trokuti.			
5. **b** je trokut a **d** nije, ili je **d** trokut a **b** nije.			
6. Ili **c** nije trokut, ili to nije **b**.			
7. Ili **c** nije trokut ili **b** to jest.			
8. Ili je **a**, ili je **b**, ili je **d** trokut.			

9. Ili je **a**, ili je **b**, ili je **c** trokut.			

U zadacima koje ćemo/ćete rješavati, disjunkciju ćemo/ćete uvijek shvaćati kao uključujuću ukoliko drugačije neće biti naglašeno!

Ekvivalenciju možemo promatrati i kao negaciju dvočlane alternacije (ili obrnuto: alternaciju možemo promatrati kao negaciju ekvivalencije, što je isto). Naime, dvočlana alternacija je istinita samo ako su oba alternanta različitih istinitinosnih vrijednosti, a upravo je u tom slučaju ekvivalencija neistinita. S druge strane, ekvivalencija je istinita samo ako njezini članovi imaju jednake istinitinosne vrijednosti, a upravo je u tom slučaju alternacija neistinita. Drugim riječima, u svakom slučaju u kojemu je ekvivalencija istinita, alternacija je neistinita, i u svakom slučaju u kojemu je ekvivalencija neistinita, alternacija je istinita.

Sažetak:

Konjunkcija ($\wedge$) je istinita samo u slučaju u kojemu su **svi konjunkti** istiniti.
Disjunkcija ($\vee$)je istinita kada je **barem jedan** od disjunkata istinit.
Implikacija ($\rightarrow$) je neistinita samo u slučaju u kojemu je **antecedens istinit a konsekvens neistinit**.
Ekvivalencija ($\leftrightarrow$) je istinita samo u slučajevima u kojima **oba člana imaju jednaku** istinitinosnu vrijednost.
Alternacija (isključujuća disjunkcija) je istinita samo u slučaju u kojemu je **samo jedan** alternant istinit.

U sudu $P \rightarrow Q$, P je *dostatan uvjet* za ostvarenje Q, a Q je *nužan uvjet* za ostvarenje P (odnosno, bez njega P se ne može ostvariti , tj. $\neg Q \rightarrow \neg P$ — ***kontrapozicija***)

$P \vee Q$ istovrijedno je s $\neg P \rightarrow Q$ i s $\neg Q \rightarrow P$.