I. Zadatak

U svakom zadatku zadan je skup premisa (pretpostavki). Broj sudova koji iz tih skupova možemo izvesti je beskonačan, no ovdje ih je ponuđeno nekoliko. Dokažite, prema zadanom ključu tumačenja, za svaku od zadanih konkluzija da slijedi iz premisa! (možete to dokazati u jednom dokazu ili možete svaki slijed posebno dokazivati)

Zadaci su obilježeni prema procijenjenoj težini: Osnovni zadaci koje svatko mora moći riješiti nemaju oznaku, teži su stupnjevani zvjezdicama (*, **)

Uz osnovna, dopuštena su pravila: MT (Modus tollens), DS (Disjunktivni silogizam), DeM (De Morganovi zakoni)

Zadaci koji nisu obilježeni zvjezdicama su obavezni i razina su sposobnosti koja je za dovoljnu ocjenu. Zadaci obilježeni zvjezdicama razina su sposobnosti za više ocjene.

1. Franjo nije crvenokos.

[Ključ tumačenja: f za Franjo; Cx za 'x je crvenokos'; Px za 'x je plavokos'; domena (predmetno područje): svi ljudi]

Dokažite da iz gornje premise slijede sudovi:

a. Franjo nije crvenokos ili nije plavokos.
b. Ako je Franjo plavokos, onda nije crvenokos.
c. Netko nije crvenokos.
d. Nije svatko crvenokos.

2.

Franjo je bio u Dhaki ili je bio u Kalkuti. Tko je bio u Dhaki, bio je u Bangladešu, a u Indiji su bili svi koji su bili u Kalkuti.

[Ključ tumačenja: f za Franjo; Dx za 'x je bio u Dhaki'; Kx za 'x je bio u Kalkuti'; Bx za 'x je bio u Bangladešu'; Ix za 'x je bio u Indiji'; domena: svi ljudi]

Dokažite da iz gornjih premisa slijede sudovi:

a. Franjo je bio u Bangladešu ili u Indiji.
b. Franjo nije bio u Bangladešu samo ako je bio u Kalkuti.
c. Netko je bio u Bangladešu ili je bio u Kalkuti.
d. Nije slučaj da nitko nije bio ni u Dhaki ni u Indiji.*

3.

Sve su igre na sreću uzbudljive. Neki školski zadaci nisu uzbudljivi.

[Ključ tumačenja: Sx za 'x je igra na sreću'; Ux za 'x je uzbudljiv'; Zx za 'x je školski zadatak', z za ovu zadaću (4(3)); domena: svi predmeti]

Dokažite da iz gornjih premisa slijede sudovi:

a. Nešto nije uzbudljivo.
b. Nešto nije igra na sreću.
c. Neki školski zadaci nisu igre na sreću.
d. Nijedan školski zadatak koja nije uzbudljiv, nije igra na sreću.
e. Ako ovaj zadataj nije uzbudljiv, onda nije igra na sreću.
f. Ovaj je zadatak uzbudljiv ili nije igra na sreću.***

4.

Sve se kreće. Što god je crvene boje ljudi mogu vidjeti golim okom. Neki su planeti crvene boje.

[Ključ tumačenja: z za Zemlja; Kx za 'x se kreće'; Cx za 'x je crvene boje'; Vx za 'x ljudi mogu vidjeti golim okom'; Px za 'x je planet'; domena: svi predmeti]

Dokažite da iz gornjih premisa slijede sudovi:

a. Postoje planeti koje ljudi mogu vidjeti golim okom.
b. Nešto što ljudi mogu vidjeti golim okom se kreće.*
c. Nešto crvene boje se kreće.*
d. Svi planeti se kreću.*
e. Kreće se sve što je crvene boje.
f. Ako ljudi Zemlju ne mogu vidjeti golim okom, ona nije crvene boje.
g. Svaki planet crvene boje ljudi mogu vidjeti golim okom i kreće se.*

**5.

Tkogod je puzav ili laskavac, naporan je u društvu. Tkogod pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi taj je laskavac i nije iskren. Netko pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi.

[Ključ tumačenja: Px za 'x je puzav'; Lx za 'x je laskavac'; Nx za 'x je naporan u društvu'; Hx za 'x pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi'; Domena: svi ljudi]

Dokažite da iz gornjih premisa slijede sudovi:

a. Nitko tko pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi nije iskren.
b. Svatko tko pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi naporan je u društvu.
c. Ako netko nije naporan u društvu, onda nije ni puzav niti je laskavac.
d. Ako netko nije naporan u društvu, onda ne pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi.
e. Postoji laskavac koji nije iskren.
f. Neki koji nisu iskreni naporni su u društvu.
g. Nitko iskren ne pretjerujeu hvaljenju radi svoje koristi.
h. Dokažite da bi rečenica: 'Iskreni Pero pretjeruje u hvaljenju radi svoje koristi.' zadani skup premisa učinila nezadovoljivom (protuslovnim).

II. Zadatak (semantika)

U ovome zadatku trebate odrediti istinitost (**i**), neistinitost (**n**) ili neodredivost istinitosne vrijednosti (**?**) na temelju sljedeće priče:

> Troje je prijatelja otišlo kampirati u šumu. Nakon što su zajednički razapeli šator, svatko je otišao za drugim poslovima. *Marko je sakupljao drvo za ogrijev. Zdravka je brala gljive. Franka je tražila vodu.* Neki su od njih sa svojim poslom završili ranije, pa su pomogli nekome od ostalih.

Procijenite jesu li sljedeće rečenice **i**, **n** ili **?**, i objasnite zašto!

a. Marko nije tražio vodu.
b. Ako je Marko sakupljao drva za ogrijev, onda je Zdravka tražila vodu.
c. Ako su Franka i Zdravka tražile vodu, onda je Marko sakupljao drva za ogrijev.
d. Zdravka je tražila vodu ili je brala gljive.
e. Nije slučaj da ni Zdravka ni Franka nisu sakupljale drvo za ogrijev.
f. Ako Franka nije tražila vodu, Zdravka nije sakupljala gljive.
g. Ako Zdravka nije brala gljive, onda netko nije brao gljive.
h. Franka nije tražila vodu ako je Marko sakupljao drva za ogrijev.
i. Nitko nije brao gljive.
j. Svatko je tražio vodu.
k. Nitko nije brao gljive ili nije tražio vodu.
l. Nitko nije brao gljive ni tražio vodu.
m. Netko nije sakupljao drva za ogrijev.

Rješenja: Za svaki izvod može sa napraviti poseban dokaz, no ovdje je radi uštede prostora nekoliko izvoda napravljeno u jednom dokazu.

1.a., b., c. i d. Rečenica a. dokazana je u 2. retku, c. u 3., b. u 6., d. u 10.

1	$\neg Cf$	pretp.
2	$\neg Cf \vee \neg Pf$	1/ u$\vee$
3	$\exists x \neg Cx$	1/ u$\exists$
4	$\mid\ Pf$	pretp.
5	$\mid\ \neg Cf$	1/ op.
6	$Pf \rightarrow \neg Cf$	4–5/ u$\rightarrow$
7	$\mid\ \forall x Cx$	pretp.
8	$\mid\ Cf$	7/ i$\forall$
9	$\mid\ \perp$	1, 8/ u$\perp$
10	$\neg \forall x Cx$	7–9/ u$\neg$

2.a.

1	$Df \vee Kf$	pretp.
2	$\forall x(Dx \rightarrow Bx)$	pretp.
3	$\forall x(Kx \rightarrow Ix)$	pretp.
4	$Df \rightarrow Bf$	2/ i$\forall$
5	$Kf \rightarrow If$	3/ i$\forall$
6	$\mid\ Df$	pretp.
7	$\mid\ Bf$	4, 6/ i$\rightarrow$
8	$\mid\ Bf \vee If$	7/ u$\vee$
9	$\mid\ Kf$	pretp.
10	$\mid\ If$	5, 9/ i$\rightarrow$
11	$\mid\ Bf \vee If$	10/ u$\vee$
12	$Bf \vee If$	1, 6–8, 9–11/ i$\vee$

Neformalni dokazi:

(a.) Iz suda Franjo nije crvenokos, slijedi i da on nije crvenokos ili nije plavokos (a.). Drugim riječima, ako je naša premisa istinita, onda je i sud a. istinit (jer je jedan njegov disjunkt istinit, a to nam je dovoljno). Istina je očuvana.

(c.) Jednako kao i gore: ako Franjo nije crvenokos, onda je istina i da netko nije crvenokos. (Imajte pred očima da je $\exists$ poopćenje $\vee$!)

(b) Kako znamo da Franjo nije crvenokos, tako je istinit i svaki sud u kojemu je on konzekvens (Sjetite se: implikacija je neistinita samo u jednom slučaju: kada je antecedens istinit, a konzekvens neistinit; u ovo je slučaju konzekvens istinit, pa je i implikacija istinita). Dokaz započinjemo pretpostavkom: Franjo je plavokos, a kako je tvrdnja da nije crvenokos naša početna pretpostavka - ponovimo ju (ili opetujemo (op.)), te izvodimo 'Ako je plavokos, nije crvenokos'.

(d.) Pretpostavimo da je svatko crvenokos. Iz toga slijedi da je i Franjo crvenokos, no to protuslovi našoj premisi, pa zaključujemo na nijek naše dodatne pretpostavke: Nije svatko crvenokos.

2.a. Prvo pretpostavimo da je bio u Dhaki. Iz toga slijedi da je bio u Bangledašu (prema 4), pa je stoga bio u Bangladešu ili u Indiji. Sljedeće, pretpostavimo da je bio u Kalkuti. Iz toga slijedi da je bio u Indiji (prema 5), pa je stoga bio u Bangladešu ili u Indiji. Kako znademo ba je bio barem u jednome u ta dva grada (prema 1), a bilo u kojem da je bio slijedi da je bio u Bangladešu ili u Indiji, to možemo tvrditi i bez dodatnih pretpostavki (i$\vee$).

2.b.

1	$Df \vee Kf$	pretp.
2	$\forall x(Dx \rightarrow Bx)$	pretp.
3	$\forall x(Kx \rightarrow Ix)$	pretp.
4	$Df \rightarrow Bf$	2/ i$\forall$
5	$\mid\ \neg Bf$	pretp.
6	$\mid\ \neg Df$	4, 5/ MT
7	$\mid\ Kf$	1, 6/ DS
8	$\neg Bf \rightarrow Kf$	5–7/ u$\rightarrow$

2.d.

1	$Df \vee Kf$	pretp.
2	$\forall x(Dx \rightarrow Bx)$	pretp.
3	$\forall x(Kx \rightarrow Ix)$	pretp.
4	$Kf \rightarrow If$	3/ i$\forall$
5	$\mid\ \forall x(\neg Dx \wedge \neg Ix)$	pretp.
6	$\mid\ \neg Df \wedge \neg If$	5/ i$\forall$
7	$\mid\ \neg Df$	6/ i$\wedge$
8	$\mid\ Kf$	1, 7/ DS
9	$\mid\ If$	4, 8/ i$\rightarrow$
10	$\mid\ \neg If$	6/ i$\wedge$
11	$\mid\ \perp$	9, 10/ u$\perp$
12	$\neg \forall x(\neg Dx \wedge \neg Ix)$	5–11/ u$\neg$

Neformalni dokazi:

2.b. U posljednjem koraku trebamo uvesti $\rightarrow$, pa dokaz započinjemo pretpostavkom antecedensa: Franjo nije bio u Bangladešu. Kako je biti u Bangladešu nužan uvjet za biti u Dhaki, izvodimo (prema 2, odnosno 4) da Franjo nije bio u Dhaki. Prema prvoj premisi znademo da je bio u Dhaki ili u Kalkuti, pa je stoga, bio u Kalkuti (barem jedan disjunkt mora biti istinit). Na kraju uključujemo $\rightarrow$: Ako nije bio u Bangladešu, bio je u Kalkuti.

2.d. Kako bismo izveli da pod ovim premisama vrijedi da nije slučaj da nitko nije bio ni u Dhaki ni u Indiji, dokaz započinjemo pretpostavkom: Nitko nije bio ni u Dhaki ni u Indiji (Zašto? Jer ćemo tom pretpostavkom doći u protuslovlje ($\perp$), iz čega ćemo pokazati da je ta pretpostavka neodrživa, odnosno da vrijedi njezina negacija, a to je ono što želimo dokazati.). Pod ovom pretpostavkom vrijedi i da Franjo nije bio ni u Dhaki ni u Indiji (jer nitko nije bio, pa nije bio ni on), stoga je bio u Kalkuti (jer u Dhaki nije bio, a bio je - prema 1 - u njoj ili u Kalkuti). No, ako je tako, bio je u Indiji (jer je biti u Kalkuti za to dostatan uvjet). Ali ovo protuslovi onome što smo izveli iz naše dodatne pretpostavke (da njie bio u Indiji). Pa zaključujemo da je ona neodrživa i izvodimo njezin nijek: Nije slučaj da nitko nije bio ni u Dhaki ni u Indiji.

3.a., b. i c. u jednom dokazu:

1		$\forall x(Sx \to Ux)$	pretp.
2		$\exists x(Zx \land \neg Ux)$	pretp.
3		$Sz \to Uz$	1/ i$\forall$
4	z	$Zz \land \neg Uz$	pretp.
5		$\neg Uz$	4/ i$\land$
6		$\exists x \neg Uz$	5/ u$\exists$
7		$\neg Sz$	3, 5/ MT
8		$\exists x \neg Sz$	7/ u$\exists$
9		Zz	4/ i$\land$
10		$Zz \land \neg Sz$	9, 7/ u$\land$
11		$\exists x(Zx \land \neg Sz)$	10/ u$\exists$
12		$\exists x \neg Uz$	2, 4–11/ i$\exists$
13		$\exists x \neg Sz$	2, 4–11/ i$\exists$
14		$\exists x(Zx \land \neg Sz)$	2, 4–11/ i$\exists$

Neformalni dokaz:

3.a., b. i c. Iz zadanog skupa premisa želimo izvesti: 'Nešto nije uzbudljivo', 'Nešto nije igra na sreću' i 'Neki školski zadaci nisu igre na sreću'. Za svaki ovaj izvod potrebna nam je premisa 'Neki školski zadaci nisu uzbudljivi', pa će posljednji korak u izvodu biti i$\exists$ te premise.

Kako bismo ga isključili, pretpostavimo da je taj "neki" upravo Vježba 4(3): 'Vježba 4(3) je školski zadatak i nije uzbudljiva. Kako ona nije uzbudljiva, tako i 'Nešto nije uzbudljivo' (u$\exists$). Nadalje, činjenica da je nešto uzbudljivo je nužan uvjet da bi bilo igrom na sreću, a kako ova vježba ne ispunjava taj uvjet (tj. nije uzbudljiva), slijedi da Vježba 4(3) nije igra na sreću, pa tako i 'Nešto nije igra na sreću (u$\exists$). Prema pretpostavci, Vježba 4(3) je školski zadatak, pa je stoga, prema prethodnom, školski zadatak i nije igra na sreću. Iz ovoga slijedi da 'Neki školski zadaci nisu igre na sreću' (u$\exists$).

Sada, sve što je izvedeno, izvedeno je pod pretpostavkom da je Vježba (3) školski zadatak koji nije uzbudljiv, no mi ne znamo je li to doista tako (zapravo nije jer je domaći zadatak, a o uzbudljivosti prosudite sami). Ali znamo (prema 2) da postoji školski zadatak koji nije uzbudljiv, pa one rečenice u kojima smo se oslobodili Vježbe (3) možemo tvrditi i bez pretpostavke o njoj.

Dakle, i bez pretpostavke vrijedi da **a.** 'Nešto nije uzbudljivo', **b.** 'Nešto nije igra na sreću' i **c.** 'Neki školski zadaci nisu igre na sreću'. Sve smo ih izveli isključujući $\exists$ iz premise (2) pomoću poddokaza.

3.d. i e. u jednom dokazu:

1		$\forall x(Sx \to Ux)$	pretp.
2		$\exists x(Zx \land \neg Ux)$	pretp.
3		$Sz \to Uz$	1/ i$\forall$
4	z	$Zz \land \neg Uz$	pretp.
5		$\neg Uz$	4/ i$\land$
6		$\neg Sz$	3, 5/ MT
7		$\forall x((Zx \land \neg Ux) \to \neg Sx)$	4–6/ u$\forall$
8	z	$\neg Uz$	pretp.
9		$\neg Sz$	3, 5/ MT
10		$\neg Uz \to \neg Sz$	8–9/ u$\to$

Neformalni dokaz:

3.d. Želimo dokazati da iz premisa slijedi: 'Nijedna <u>školska zadaća koja nije uzbudljiva</u> nije <u>igra na sreću</u>'. Posljednji korak imat će oblik: $\forall x(\ldots \to \ldots)$, tj. posljednji će korak biti uvođenje $\forall$ (u istom koraku s $\to$). Za ovo dokaz je potrebno započeti s pretpostavkom dostatnog uvjeta:

Pretpostavimo da je Vježba 4(3) školski zadatak koji nije uzbudljiv. Kako nije uzbudljiva, tako nije ni igra na sreću.

Sada, umjesto Vježbe (3), moglo je stajati bilo što ili bilo tko (mogao je stajati npr. Velebit) i u svakom tom slučaju došli bismo do istoga. Pa zaključujemo: štogod je školska zadaća koja njie uzbudljiva, nije igra na sreću

3.e. Uočite da je dokaz gotovo identičan 3.d. Mi smo u gornjem dokazu umjesto u$\forall$ mogli uvesti $\to$, pa izvesti npr.: Ako je Velebit zadatak koji nije uzbudljiv, onda on nije igra na sreću.

II. Zadatak

a. **?** ; b. **?** ; c. **i** ; d. **i** ; e. **?** ; f. **i** ; g. **i** ; h. **n** ; i. **n** ; j. **?** ; k. **?** ; l. **n**; m. **?**