

Uvijek postoji više načina na koje je moguće izvesti dokaz!

U ovim rješenjima samo je jedan mogući način!

Rješenja vježbe 4(1):

1. Prijevod zaključka: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$

(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom *modus tollens* (MT))

Dokaz:

| | | |
|---|-------------------|-----------------------|
| 1 | $P \rightarrow R$ | pretp. |
| 2 | $\neg R$ | pretp. |
| 3 | P | pretp. |
| 4 | R | 1, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | \perp | 2, 4/ $u \perp$ |
| 6 | $\neg P$ | 3-5/ $u \neg$ |

2. $P \rightarrow R \vdash \neg R \rightarrow \neg P$

(*kontrapozicija*, uočite sličnost sa 1.)

| | | |
|---|-----------------------------|-----------------------|
| 1 | $P \rightarrow R$ | pretp. |
| 2 | $\neg R$ | pretp. |
| 3 | P | pretp. |
| 4 | R | 1, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | \perp | 2, 4/ $u \perp$ |
| 6 | $\neg P$ | 3-5/ $u \neg$ |
| 7 | $\neg R \rightarrow \neg P$ | 2-6/ $u \rightarrow$ |

3. $P \rightarrow O, O \rightarrow V \vdash P \rightarrow V$

(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom *hipotetički silogizam*

(HS) ili *lančani zaključak*)

| | | |
|---|-------------------|-----------------------|
| 1 | $P \rightarrow O$ | pretp. |
| 2 | $O \rightarrow V$ | pretp. |
| 3 | P | pretp. |
| 4 | O | 1, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | V | 2, 4/ $i \rightarrow$ |
| 6 | $P \rightarrow V$ | 3-5/ $u \rightarrow$ |

4. $P \rightarrow O, \neg V \rightarrow \neg O \vdash \neg V \rightarrow \neg P$

(Uočite vezu s kontrapozicijom i hip. silogizmom!)

| | | |
|---|-----------------------------|-----------------------|
| 1 | $P \rightarrow O$ | pretp. |
| 2 | $\neg V \rightarrow \neg O$ | pretp. |
| 3 | $\neg V$ | pretp. |
| 4 | $\neg O$ | 2, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | P | pretp. |
| 6 | O | 1, 5/ $i \rightarrow$ |
| 7 | \perp | 4, 6/ $u \neg$ |
| 8 | $\neg P$ | 5-7/ $u \neg$ |
| 9 | $\neg V \rightarrow \neg P$ | 3-8/ $u \rightarrow$ |

5. $P \wedge \neg K, P \rightarrow K \vdash \perp$

| | | |
|---|-------------------|-----------------------|
| 1 | $P \rightarrow K$ | pretp. |
| 2 | $P \wedge \neg K$ | pretp. |
| 3 | P | 2/ $i \wedge$ |
| 4 | K | 1, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | $\neg K$ | 2/ $i \wedge$ |
| 6 | \perp | 4, 5/ $u \perp$ |

6. $N \rightarrow (P \wedge C), \neg C \vdash \neg N$

| | | |
|---|------------------------------|-----------------------|
| 1 | $N \rightarrow (P \wedge C)$ | pretp. |
| 2 | $\neg C$ | pretp. |
| 3 | N | pretp. |
| 4 | $P \wedge C$ | 1, 3/ $i \rightarrow$ |
| 5 | C | 4/ $i \wedge$ |
| 6 | \perp | 2, 5/ $u \perp$ |
| 7 | $\neg N$ | 3-6/ $u \neg$ |

7. $(P \wedge C) \rightarrow N$

$\vdash P \rightarrow (C \rightarrow N)$

| | | |
|---|-----------------------------------|-----------------------|
| 1 | $(P \wedge C) \rightarrow N$ | pretp. |
| 2 | P | pretp. |
| 3 | C | pretp. |
| 4 | $P \wedge C$ | 2, 3/ $u \wedge$ |
| 5 | N | 1, 4/ $i \rightarrow$ |
| 6 | $C \rightarrow N$ | 3-5/ $u \rightarrow$ |
| 7 | $P \rightarrow (C \rightarrow N)$ | 2-6/ $u \rightarrow$ |

8. $\forall x(Mx \rightarrow Pxm), \forall x(Pxm \rightarrow Rx) \vdash \forall x(Mx \rightarrow Rx)$

(Uočite vezu s HS)

| | | |
|---|---------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\forall x(Mx \rightarrow Pxm)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x(Pxm \rightarrow Rx)$ | pretp. |
| 3 | a Ma | pretp. |
| 4 | $Ma \rightarrow Pam$ | 1/ $i \forall$ |
| 5 | $Pam \rightarrow Ra$ | 2/ $i \forall$ |
| 6 | Pam | 3, 4/ $i \rightarrow$ |
| 7 | Ra | 5, 6/ $i \rightarrow$ |
| 8 | $\forall x(Mx \rightarrow Rx)$ | 3-7/ $u \forall$ |

9. $\forall x(Mx \rightarrow Sx), \forall x(Kx \rightarrow \neg Sx) \vdash \forall x(Kx \rightarrow \neg Mx)$
(Uočite vezu s kontrapozicijom i HS)

| | | |
|----|-------------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x(Kx \rightarrow \neg Sx)$ | pretp. |
| 3 | a Ma | pretp. |
| 4 | $Ma \rightarrow Sa$ | 1/ i \forall |
| 5 | Sa | 3, 4/ i \rightarrow |
| 6 | Ka | pretp. |
| 7 | $Ka \rightarrow \neg Sa$ | 2/ i \forall |
| 8 | $\neg Sa$ | 6, 7/ i \rightarrow |
| 9 | \perp | 5, 8/ u \perp |
| 10 | $\neg Ka$ | 6-9/ u \neg |
| 11 | $\forall x(Mx \rightarrow \neg Kx)$ | 3-10/ u \forall |

10. $\forall x(\neg Px \rightarrow \neg Tx), \forall x(Px \rightarrow \neg Cx) \vdash \forall x(Cx \rightarrow \neg Tx)$
(Uočite sličnost s 9.)

| | | |
|----|--|-----------------------|
| 1 | $\forall x(\neg Px \rightarrow \neg Tx)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x(Px \rightarrow \neg Cx)$ | pretp. |
| 3 | a Ca | pretp. |
| 4 | Pa | pretp. |
| 5 | $Pa \rightarrow \neg Ca$ | 2/ i \forall |
| 6 | $\neg Ca$ | 4, 5/ i \rightarrow |
| 7 | \perp | 3, 6/ u \perp |
| 8 | $\neg Pa$ | 4-7/ u \neg |
| 9 | $\neg Pa \rightarrow \neg Ta$ | 2/ i \forall |
| 10 | $\neg Ta$ | 8, 9/ i \rightarrow |
| 11 | $\forall x(Cx \rightarrow \neg Tx)$ | 3-10/ u \forall |

Vježba 4(2) rješenja:

1. Prijevod zaključka: $P \vee S, \neg S \vdash P$
(Ovaj je zaključak poznat pod nazivom *disjunktivni silogizam* (DS))

| | | |
|----|---------------|-----------------------|
| 1 | $P \vee S$ | pretp. |
| 2 | $\neg S$ | pretp. |
| 3 | P | pretp. |
| 4 | P | 3/ op. |
| 5 | S | pretp. |
| 6 | $\neg P$ | pretp. |
| 7 | \perp | 2, 5/ u \perp |
| 8 | $\neg \neg P$ | 6-7/ u \neg |
| 9 | P | 8/ i \neg |
| 10 | P | 1, 3-4, 5-9/ i \vee |

2. $\neg P \vee Z, P \vdash Z$
(dokaz je gotovo jednak prethodnom)

| | | |
|----|-----------------|-----------------------|
| 1 | $\neg P \vee Z$ | pretp. |
| 2 | P | pretp. |
| 3 | $\neg P$ | pretp. |
| 4 | $\neg Z$ | pretp. |
| 5 | \perp | 2, 3/ u \perp |
| 6 | $\neg \neg Z$ | 4-5/ u \neg |
| 7 | Z | 6/ i \neg |
| 8 | Z | pretp. |
| 9 | Z | 8/ op. |
| 10 | Z | 1, 3-7, 8-9/ i \vee |

3. $(D \wedge M) \vee N, \neg M \vdash N$
koristite DS kao pravilo!

| | | |
|----|---|-----------------------|
| 1 | $(D \wedge M) \vee N$ | pretp. |
| 2 | $\neg M$ | pretp. |
| 3 | $D \wedge M$ | pretp. |
| 4 | M | 3/ i \wedge |
| 5 | \perp | 2, 4/ u \perp |
| 6 | $\neg(D \wedge M)$ | 3-5/ u \neg |
| 7 | N | 1, 6/ DS |
| 4. | $V \vee O, V \rightarrow L, O \rightarrow L \vdash L$ | |
| 1 | $V \vee O$ | pretp. |
| 2 | $V \rightarrow L$ | pretp. |
| 3 | $O \rightarrow L$ | pretp. |
| 4 | V | pretp. |
| 5 | L | 2, 4/ i \rightarrow |
| 6 | O | pretp. |
| 7 | L | 3, 6/ i \rightarrow |
| 8 | L | 1, 4-5, 6-7/ i \vee |

5. $M \vee P, P \rightarrow J \vdash \neg M \rightarrow J$

| | | |
|---|------------------------|-----------------------|
| 1 | $M \vee P$ | pretp. |
| 2 | $P \rightarrow J$ | pretp. |
| 3 | $\neg M$ | pretp. |
| 4 | P | 1, 3/ DS |
| 5 | J | 2, 4/ i \rightarrow |
| 6 | $\neg M \rightarrow J$ | 3-5/ u \rightarrow |

6. $Vjk \vee Vjd \vdash \neg(\neg Vjk \wedge \neg Vjd)$

(Ovi su iskazi istovrijedni (iako je ovdje dokazan samo jedan smijer), a pretvaranje jednog u drugi (općenito: pretvaranje \vee u \wedge i obrnuto) poznato je pod nazivom **De Morganov zakon (DeM)**)

| | | |
|----|----------------------------------|----------------------|
| 1 | $Vjk \vee Vjd$ | pretp. |
| 2 | $\neg Vjk \wedge \neg Vjd$ | pretp. |
| 3 | Vjk | pretp. |
| 4 | $\neg Vjk$ | 2/ $i\wedge$ |
| 5 | \perp | 3, 4/ $u\perp$ |
| 6 | Vjd | pretp. |
| 7 | $\neg Vjd$ | 2/ $i\wedge$ |
| 8 | \perp | 6, 7/ $u\perp$ |
| 9 | \perp | 1, 3-5, 6-8/ $i\vee$ |
| 10 | $\neg(\neg Vjk \wedge \neg Vjd)$ | 2-9/ $u\neg$ |

7. $\neg Vjk \wedge \neg Vjd \vdash \neg(Vjk \vee Vjd)$

(Ovi su iskazi istovrijedni (iako je ovdje dokazan samo jedan smijer), a pretvaranje jednog u drugi (općenito: pretvaranje \vee u \wedge i obrnuto) poznato je pod nazivom **De Morganov zakon (DeM)**)

| | | |
|----|----------------------------|----------------------|
| 1 | $\neg Vjk \wedge \neg Vjd$ | pretp. |
| 2 | $Vjk \vee Vjd$ | pretp. |
| 3 | Vjk | pretp. |
| 4 | $\neg Vjk$ | 1/ $i\wedge$ |
| 5 | \perp | 3, 4/ $u\perp$ |
| 6 | Vjd | pretp. |
| 7 | $\neg Vjd$ | 1/ $i\wedge$ |
| 8 | \perp | 6, 7/ $u\perp$ |
| 9 | \perp | 2, 3-5, 6-8/ $i\vee$ |
| 10 | $\neg(Vjk \vee Vjd)$ | 2-9/ $u\neg$ |

8.

$Te \rightarrow (Se \vee Je), Se \rightarrow Me, Te \wedge \neg Je \vdash Me$
(u ovome se dokazu koristi DS umjesto $i\vee$)

| | | |
|---|-------------------------------|----------------------|
| 1 | $Te \rightarrow (Se \vee Je)$ | pretp. |
| 2 | $Se \rightarrow Me$ | pretp. |
| 3 | $Te \wedge \neg Je$ | pretp. |
| 4 | Te | 3/ $i\wedge$ |
| 5 | $Se \vee Je$ | 1, 4/ $i\rightarrow$ |
| 6 | $\neg Je$ | 3/ $i\wedge$ |
| 7 | Se | 5, 6/ DS |
| 8 | Me | 2, 7/ $i\rightarrow$ |

9.

$\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm), \forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Bx)$
 $\vdash \forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Sxm)$

| | | |
|---|---|----------------------|
| 1 | $\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Bx)$ | pretp. |
| 3 | a $Ma \wedge Ka$ | pretp. |
| 4 | $(Ma \wedge Ka) \rightarrow Ba$ | 2/ $i\forall$ |
| 5 | Ba | 3, 4/ $i\rightarrow$ |
| 6 | $Pa \vee Ba$ | 5/ $u\vee$ |
| 7 | $(Pa \vee Ba) \rightarrow Sam$ | 1/ $i\forall$ |
| 8 | Sam | 6, 7/ $i\rightarrow$ |
| 9 | $\forall x((Mx \wedge Kx) \rightarrow Sxm)$ | 3-8/ $u\forall$ |

10.

U OVOM JE DOKAZU U KRNJIM RJEŠENJIMA NE-DOSTAJAO JEDAN REDAK

$\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm), \forall x(Vx \rightarrow \neg Sxm)$
 $\vdash \forall x(Vx \rightarrow (\neg Px \wedge \neg Bx))$

| | | |
|---|--|----------------------|
| 1 | $\forall x((Px \vee Bx) \rightarrow Sxm)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x(Vx \rightarrow \neg Sxm)$ | pretp. |
| 3 | a Va | pretp. |
| 4 | $Va \rightarrow \neg Sam$ | 2/ $i\forall$ |
| 5 | $\neg Sam$ | 3, 4/ $i\rightarrow$ |
| 6 | $(Pa \vee Ba) \rightarrow Sam$ | 1/ $i\forall$ |
| 7 | $\neg(Pa \vee Ba)$ | 5, 6/ MT |
| 8 | $\neg Pa \wedge \neg Ba$ | 7/ DeM |
| 9 | $\forall x(Vx \rightarrow (\neg Px \wedge \neg Bx))$ | 3-8/ $u\forall$ |

11. $\exists x(Cx \wedge Lx), \forall x(Cx \rightarrow Rx) \vdash \exists x(Lx \wedge Rx)$

| | | |
|----|--------------------------------|-----------------------|
| 1 | $\exists x(Cx \wedge Lx)$ | pretp. |
| 2 | $\forall x(Cx \rightarrow Rx)$ | pretp. |
| 3 | a $Ca \wedge La$ | pretp. |
| 4 | $Ca \rightarrow Ra$ | 2/ i \forall |
| 5 | Ca | 3/ i \wedge |
| 6 | Ra | 4, 5/ i \rightarrow |
| 7 | La | 3/ i \wedge |
| 8 | $La \wedge Ra$ | 6, 7/ u \wedge |
| 9 | $\exists x(Lx \wedge Rx)$ | 8/ u \exists |
| 10 | $\exists x(Lx \wedge Rx)$ | 1, 3-9/ i \exists |

12. $\forall x(Vx \rightarrow (Mx \vee Zx)) \vdash \forall x((Vx \wedge \neg Mx) \rightarrow Zx)$

| | | |
|---|---|-----------------------|
| 1 | $\forall x(Vx \rightarrow (Mx \vee Zx))$ | pretp. |
| 2 | a $Va \wedge \neg Ma$ | pretp. |
| 3 | Va | 2/ i \wedge |
| 4 | $Va \rightarrow (Ma \vee Za)$ | 1/ i \forall |
| 5 | $Ma \vee Za$ | 3, 4/ i \rightarrow |
| 6 | $\neg Ma$ | 2/ i \wedge |
| 7 | Za | 5, 6/ DS |
| 8 | $\forall x((Vx \wedge \neg Mx) \rightarrow Zx)$ | 2-7/ u \forall |